18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Neun und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Berlin, 1855.

Bei Georg Reimer.

Inhaltsverzeichnifs
des neun und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
6. 7.	Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen; nebst einigen Anwendungen auf die Berechnung der Wurzeln von Gleichungen. Von Hrn. Dr. *Öttinger*, ord. Prof. der Mathematik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.	I. II.	66 95
8.	Rectification des formules qui expriment le nombre des décompositions d'un nombre donné en deux carrés. Par M. *Paul Volpicelli*, professeur à l'université de Rome.	II.	119
10.	Mémoire sur la résolution de l'équation indéterminée $ax+bky=z(x^2+ky^2)$. Par Mr. *Oltramare*, prof. de math. supér. à l'académie des sciences de Genève.	II.	142
11.	Note sur les relations qui existent entre les formes quadratiques des nombres premiers. Par le même.	II.	151
12.	Mémoire sur la détermination des racines primitives des nombres premiers. Par le même.	II.	161
13.	Recherches sur la résolution des équations de tous les degrés. Par M. le colonel *F. Theremin* à Saratoff en Russie.	III.	187
14.	Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung. Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.	III.	243

2. Geometrie.

1.	Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen. Von dem Herrn Prof. *H. Grafsmann*, Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.	I.	1
2.	Grundsätze der stereometrischen Multiplication. Von Demselben.	I.	10
3.	Über die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen. Von Demselben.	I.	21
4.	Die stereometrische Gleichung zweiten Grades, und die dadurch dargestellten Oberflächen. Von Demselben.	I.	37
5.	Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen. Von Demselben.	I.	47
9.	Sur les différents genres de multiplication. Par M. *Grafsmann*, prof. des mathém. au collège de Stettin.	II.	123

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
14.	Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung. Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.	III.	243
15.	Eigenschaften der Curven vierten Grads rücksichtlich ihrer Doppeltangenten. Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.	III.	265
16.	Aufgaben und Lehrsätze. Von Demselben.	III.	273
17.	Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.	IV.	279
18.	Über algebraische Curven und Flächen. Vom Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.	IV.	333
	3. Mechanik.		
20.	Zur Theorie des Potentials. Von Herrn *Jul. Weingarten*, Stud. Math. zu Berlin.	IV.	367
	II. Angewandte Mathematik.		
19.	Über den Unterschied zwischen theoretischen und practischen Zinsrechnungen. (Nachtrag zu der Abhandlung über Sparcassen im 39. Bande dieses Journals S. 183 etc.) Vom Herausgeber.	IV.	349
	Druckfehlerverzeichnifs zum 47ten, 48ten und 49ten Bande.	I. IV.	94 370

1.

Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen.

(Von Herrn Professor *H. Grafsmann,* Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

Nachdem ich in einer Reihe von Aufsätzen die lineale Erzeugbarkeit der algebraischen ***Curven*** in der Ebene nachgewiesen habe, will ich das Gleiche nun auch für die algebraischen ***Oberflächen*** thun. Unter ***linealer Construction*** im Raume verstehe ich die ***Verbindung dreier Puncte durch eine Ebene,*** und jede hierauf zurückführbare Construction; und zwar gleich viel, ob die 3 Puncte alle 3 in endlicher Entfernung liegen, oder beliebige davon in unendlicher Entfernung sich befinden. Hierin ist schon eingeschlossen die Verbindung zweier Puncte a und b durch eine Gerade. Denn legt man durch a und b eine beliebige Ebene und nimmt aufserhalb derselben einen beliebigen Punct c an, so ist der Durchschnitt jener Ebene und der Ebene abc die gesuchte Gerade. Der Bequemlichkeit wegen werde ich Puncte, gerade Linien und Ebenen, mit dem gemeinschaftlichen Namen ***Elemente*** bezeichnen. Der zu erweisende Satz über die Erzeugung der algebraischen Oberflächen läfst sich dann in folgender Form aussprechen:

> „Wenn die Lage eines Punctes x (oder einer Ebene) im Raume dadurch beschränkt ist, dafs zwei gerade Linien, welche durch lineale Constructionen aus x und einer Reihe fester Elemente hervorgehen, in derselben Ebene liegen sollen: so ist der Ort von x eine ***algebraische Oberfläche;*** und zwar ist sie ein Gebilde $n$ten Grades, wenn bei jenen Constructionen x im Ganzen $n$mal angewendet ist. Umgekehrt läfst sich jede algebraische Oberfläche auf die angegebene Weise erzeugen."

Nämlich zur Construction von x selbst ist x eben ***einmal*** angewandt, zur Construction der festen Elemente ***kein***mal. Wenn ferner x zur Construction zweier Elemente beziehlich $\mathfrak{a}$mal und $\mathfrak{b}$mal angewandt ist, so ist es zur Construction der Verbindungs-Linie oder -Ebene, oder des Durchschnitts beider, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$mal angewandt. Um den Begriff des Gebildes $n$ten Grades scharf zu fassen, will ich diejenige Coordinatenbestimmung zu Grunde legen, welche durch die Symmetrie ihrer Formeln und durch die Allgemeingültigkeit

ihrer Resultate vor jeder andern den Vorzug hat. Nämlich wenn x_0, x_1, x_2, x_3 vier veränderliche Grōfsen sind, die jedoch nicht alle gleichzeitig Null sein dürfen, und $\frac{x_1}{x_0}$, $\frac{x_2}{x_0}$, $\frac{x_3}{x_0}$ die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Punctes x sind, so werde ich x_0, x_1, x_2, x_3 die vier Coordinaten des Puncts x nennen. Durch ihre Verhältnisse ist die Lage des Puncts x bestimmt. Unter einem Punct-Gebilde $n$ten Grades verstehe ich nun die Gesammtheit der Puncte, deren 4 Coordinaten einer in Bezug auf sie homogenen Gleichung $n$ten Grades genügen. Hieraus geht dann der Begriff des Ebenengebildes $n$ten Grades durch Reciprocität hervor; und danach wird das Verständnifs des obigen Satzes keine Schwierigkeit haben. Noch füge ich hinzu, dafs man statt der Bedingung zweier in derselben Ebene liegenden Geraden, auch die Bedingung, dafs 4 Puncte in derselben Ebene liegen (oder 4 Ebenen durch denselben Punct gehen) sollen, hätte setzen können, indem mit der einen dieser Bedingungen auch jedesmal die andere erfüllt ist.

Den Beweis des obigen Satzes, welcher in meiner Ausdehnungslehre (§. 145) aus den Principien der geometrischen Analyse sich unmittelbar ergab, will ich hier auf die gewöhnliche Analyse gründen.

Die Gleichung der Ebene ist bekanntlich:

$$(1.) \quad \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Dieselbe drückt aus, dafs der Punct, dessen 4 Coordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 sind, in einer festen Ebene liegt. Ich will α_0, α_1, α_2, α_3 die Coordinaten dieser Ebene nennen. Dann drückt also die Gleichung (1.) aus, dafs der Punct x, dessen Coordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 sind, in einer Ebene liegt, deren Coordinaten α_0, α_1, α_2, α_3 sind. Sollen daher 4 Puncte a, b, c, ∂, deren Coordinaten die Indices 0, 1, 2, 3 markiren mögen, in einer und derselben Ebene liegen, so erhält man, wenn α_0, α_1, α_2, α_3 die Coordinaten dieser Ebene sind, die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 &= 0,\\
\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 &= 0,\\
\alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 &= 0,\\
\alpha_0 \partial_0 + \alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können zusammen nur bestehen, wenn ihre ***Determinante*** Null ist; d. h. setzt man

$$(2.)\quad \begin{cases} \Delta = \mathrm{Det}\begin{Vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, \\ b_0, & b_1, & b_2, & b_3, \\ c_0, & c_1, & c_2, & c_3, \\ \partial_0, & \partial_1, & \partial_2, & \partial_3, \end{Vmatrix} = \Sigma^{\pm} a_0 b_1 c_2 \partial_3, \\ \text{so ist} \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

die Bedingungsgleichung dafür, dafs die 4 Puncte a, b, c, ∂ in einer Ebene liegen.

Vermöge der Reciprocität zwischen Punct und Ebene drückt dieselbe Gleichung auch die Bedingung aus, dafs 4 Ebenen, deren Coordinaten $a_0 \ldots a_3$, $b_0 \ldots b_3$, u. s. w. sind, durch einen Punct gehen. Da die Function Δ in Bezug auf die Coordinaten eines jeden der 4 Puncte, z. B. in Bezug auf $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3$, homogen und vom ersten Grade ist, so kann man statt $\Delta = 0$ auch

$$\Delta = \frac{d\Delta}{d\partial_0}\partial_0 + \frac{d\Delta}{d\partial_1}\partial_1 + \frac{d\Delta}{d\partial_2}\partial_2 + \frac{d\Delta}{d\partial_3}\partial_3 = 0$$

schreiben.

Setzt man hier den Punct ∂ innerhalb der Ebene abc variabel, d. h. setzt man seine Coordinaten $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3$ variabel, jedoch so, dafs sie der zuletzt aufgestellten Gleichung genügen, so folgt, dafs die Coordinaten der Ebene abc, nach der oben aufgestellten Definition,

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Delta}{d\partial_0}, \quad \dfrac{d\Delta}{d\partial_1}, \quad \dfrac{d\Delta}{d\partial_2}, \quad \dfrac{d\Delta}{d\partial_3}, \\ \text{d. h.} \\ \Sigma^{\pm} a_1 b_2 c_3, \quad \Sigma^{\pm} a_0 b_3 c_2, \quad \Sigma^{\pm} a_0 b_1 c_3, \quad \Sigma^{\pm} a_0 b_2 c_1 \end{cases}$$

sind. Dieselben Ausdrücke sind zugleich die Coordinaten des Durchschnittspuncts dreier Ebenen, deren Coordinaten $a_0 \ldots a_3$, $b_0 \ldots b_3$, $c_0 \ldots c_3$ sind.

Es seien endlich die Coordinaten zweier Puncte a und b und einer Ebene γ gegeben, nämlich $a_0 \ldots a_3$, $b_0 \ldots b_3$, $\gamma_0 \ldots \gamma_3$; und es seien die Coordinaten $x_0 \ldots x_3$ des Durchschnittspuncts x der Geraden ab und der Ebene γ gesucht. Wenn x in der Geraden ab liegen soll, so lassen sich die Coordinaten von x in der Form

$$ma_0 + nb_0, \quad ma_1 + nb_1, \quad ma_2 + nb_2, \quad ma_3 + nb_3$$

darstellen, wo m und n beliebige Zahlgröfsen sind. Und umgekehrt, wenn sich die Coordinaten von x in dieser Form darstellen lassen, so liegt x in ab. Es folgt Dies unmittelbar daraus, dafs die Parallelprojectionen von Theilen derselben Linie sich wie diese Theile verhalten. Die Bedingung, dafs x in γ

liegt, wird durch die Gleichung

$$x_0\gamma_0 + x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 = 0$$

ausgedrückt. Setzt man hierin statt $x_0 \ldots x_3$ ihre obigen Werthe, so ergiebt sich

$$m[a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3] + n[b_0\gamma_0 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3] = 0;$$

und setzt man das hieraus entspringende Verhältnifs von m zu n in die obigen Ausdrücke der Coordinaten, so erhält man:

$$(4.) \quad \begin{cases} a_0q - b_0p, \quad a_1q - b_1p, \quad a_2q - b_2p, \quad a_3q - b_3p, \quad \text{wo} \\ p = a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3, \quad q = b_0\gamma_0 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stellen also die Coordinaten des Durchschnittspuncts x einer Ebene dar, deren Coordinaten $\gamma_0, \ldots \gamma_3$ sind, und einer Geraden, welche durch zwei Puncte geht, deren Coordinaten $a_0, \ldots a_3$ und $b_0, \ldots b_3$ sind. Vermöge der Reciprocität zwischen Punct und Ebene stellen dieselben Ausdrücke auch die Coordinaten einer Ebene dar, welche durch einen Punct mit den Coordinaten $\gamma_0, \ldots \gamma_3$ und durch die Durchschnittslinie zweier Ebenen mit den Coordinaten $a_0, \ldots a_3$ und $b_0, \ldots b_3$ gelegt ist.

Hiermit haben wir nun die sämmtlichen Formeln beisammen, welche zum Beweise des Satzes hinreichen. Fragt man nämlich nach der Art, wie vermöge linealer Constructionen aus einer Reihe von Elementen neue Elemente hervorgehen können, so ist Dies, wenn wir Alles auseinander legen, nur auf eine der folgenden 6 Arten möglich: *Erstlich;* aus 3 Puncten kann ihre Verbindungs-Ebene hervorgehen, und *zweitens* reciprok aus 3 Ebenen ihr Durchschnittspunct. Ferner kann *drittens* aus zwei Puncten ihre Verbindungslinie und *viertens* reciprok aus zwei Ebenen ihre Durchschnittslinie; endlich *fünftens* aus einem Puncte und einer Geraden ihre Verbindungs-Ebene und *sechstens* reciprok aus einer Ebene und einer Geraden ihr Durchschnittspunct hervorgehen. Die letzten vier Arten lassen sich noch weiter reduciren. In der That kann die durch die dritte Erzeugungs-Art hervorgehende Gerade bei den folgenden Constructionen entweder gar nicht wieder vorkommen, in welchem Falle das Verbinden jener Puncte ganz unterbleiben kann, oder sie tritt mit einem dritten Puncte in Verbindung; in welchem Falle man die Verbindungs-Ebene dreier Puncte, also die erste Erzeugungs-Art erhält; oder endlich, sie tritt mit einer Ebene in Verbindung. Hierauf aber läfst sich die sechste Erzeugungs-Art gleichfalls zurückführen; denn die Gerade, mit welcher hier die Ebene in Verbindung tritt, kann entweder als Durchschnitt zweier Ebenen entstanden sein, in welchem Falle man den Durchschnitt dreier Ebenen, also

die zweite Erzeugungs-Art bekommt: oder sie kann als Verbindungslinie zweier Puncte entstanden sein; was auf denselben Fall zurückführt, wie die dritte Erzeugungs-Art. Wenn man die der dritten und sechsten reciproken Erzeugungs-Arten, nämlich die vierte und fünfte, eben so reducirt, so folgt, dafs die folgenden 4 Erzeugungs-Arten übrig bleiben: ***Erstlich*** die Verbindung dreier Puncte; ***zweitens*** der Durchschnitt dreier Ebenen; ***drittens*** der Durchschnitt einer Ebene mit der Verbindungslinie zweier Puncte, und *viertens* die Verbindung eines Puncts mit der Durchschnittslinie zweier Ebenen. Es führen also alle linealen Erzeugungen neuer Elemente auf die Formeln (3. und 4.) zurück.

Sind nun in Bezug auf die Coordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 eines Puncts x (oder einer Ebene) die Coordinaten von a, b, c homogen und beziehlich von den Graden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so zeigt die Formel (3.), dafs auch die Coordinaten des aus a, b, c durch Verbindung der Puncte, oder als Durchschnitt der Ebenen hervorgehenden Elements homogen sind; und zwar vom Grade $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$. Dasselbe ergiebt sich aus der Formel (4.) für das aus a, b, γ hervorgehende Element. Also werden die Coordinaten eines lineal erzeugten Elements in Bezug auf die Coordinaten des veränderlichen Elements x stets homogen und zwar vom $n$ten Grade sein, wenn bei der Erzeugung x im Ganzen $n$mal angewandt ist. Endlich zeigt die Formel (2.), welche ausdrückt, dafs die 4 Puncte a, b, c, ∂ in einer Ebene liegen, dafs, wenn die Coordinaten von a, b, c, ∂ homogen und beziehlich von den Graden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sind, die hervorgehende Gleichung vom $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$ten Grade ist, also vom $n$ten, wenn bei den linealen Constructionen der Puncte a, b, c, ∂ das variable Element x im Ganzen $n$mal angewandt ist.

Es bleibt demnach nur noch der umgekehrte Satz zu beweisen, nämlich dafs sich jede algebraische Oberfläche auf die bezeichnete Weise erzeugen läfst. Der Beweis ist genau dem für die Curven analog (siehe dieses Journ. Bd. 42. S. 187). Nämlich es wird sich die Gleichung jeder algebraischen Oberfläche in der Form

$$f(x, y, z) = 0$$

darstellen lassen, wo $f(x, y, z)$ eine ganze rationale Function der rechtwinkligen, oder schiefwinkligen Coordinaten x, y, z des die Oberfläche erzeugenden Puncts (der sie umhüllenden Ebene) ist. Diese Function, da sie eine ganze rationale ist, geht aus x, y, z und den Constanten durch Addition und

Multiplication hervor. Also kommt es nur darauf an, die Addition und Multiplication zweier Zahlgröfsen durch lineale Construction darzustellen.

Zu dem Ende nehme man irgend eine aus dem Anfangspunct o der Coordinaten gezogene gerade Linie und auf ihr irgend ein Maafs $o\partial$ zu Hülfe, und nehme an, es sei jede Constante der Function durch einen Punct dieser Geraden in der Art dargestellt, dafs die Entfernung dieses Puncts vom Anfangspunct o, gemessen durch das Maafs $o\partial$, jener Constanten gleich sei. Eben so übertrage man die Coordinaten des construirenden Punctes p auf dieselbe Linie und dasselbe Maafs $o\partial$; und zwar mittels linealer Construction.

Man lege nämlich durch p eine Ebene, welche mit zweien der Coordinaten-Axen parallel ist, und nenne den Punct in welchem diese Ebene die Gerade $o\partial$ schneidet, a, und den Punct, worin sie die dritte Axe, die wir als die x Axe setzen, schneidet, a'. Dann ist oa' die zu der x Axe gehörige Coordinate. Diese soll in die Function als Zahlgröfse eingehen. Sie mufs also durch irgend ein Maafs gemessen sein. Es sei die entsprechende Coordinate des Punctes ∂ dieses Maafs; d. h. wenn man durch ∂ die Ebene parallel mit den beiden andern Axen legt und den Punct, in welchem diese Ebene die x Axe schneidet, ∂' nennt, so soll $o\partial'$ das Maafs sein, mit welchem alle der x Axe zugehörigen Coordinaten gemessen sind, also $x = \frac{oa'}{o\partial'}$. Aber vermöge des Parallelismus der Ebenen ist $\frac{oa'}{o\partial'} = \frac{oa}{o\partial}$. Also erhält man, unter den gemachten Voraussetzungen, für irgend eine beliebige Coordinate (x) eines Puncts p, den Punct a in $o\partial$, durch welchen sie dargestellt wird, als den Durchschnittspunct von $o\partial$ mit einer durch p gelegten, den beiden andern Axen parallelen Ebene; so nämlich, dafs $x = \frac{oa}{o\partial}$ ist. Auf diese Weise sind nun alle in der Function vorkommenden Zahlgröfsen durch Puncte der Linie $o\partial$ dargestellt, und es kommt nur darauf an, auch die Summe des Products zweier solcher Gröfsen auf gleiche Weise, und zwar mittels linealer Constructionen darzustellen, d. h. wenn f und g zwei solche Puncte sind, und h der gesuchte, so soll im ersten Falle h so bestimmt werden, dafs

$$\frac{of}{o\partial} + \frac{og}{o\partial} = \frac{oh}{o\partial}, \text{ d. h. } of + og = oh,$$

und im zweiten Falle so, dafs

$$\frac{of}{o\partial} \cdot \frac{og}{o\partial} = \frac{oh}{o\partial}, \text{ d. h. } of \,.\, og = oh \,.\, o\partial$$

oder

$$o\partial : of = og : oh$$

sei. Aus der Elementargeometrie weifs man, wie in beiden Fällen der Punct h durch parallele Linien oder Ebenen, also durch lineale Constructionen erfolgt. (S. dieses Journ. Bd. 42. S. 187.) Also läfst sich allgemein $f(x, y, z)$ aus dem die Oberfläche erzeugenden Puncte durch lineale Constructionen als ein Punct der Linie $o\partial$ darstellen. Es erfolgt dieser Punct als Durchschnitt der Geraden $o\partial$ mit einer lineal construirten Ebene. Soll nun $f(x, y, z)$ Null sein, so mufs jener Punct in 0 fallen, d. h. diese lineal construirte Ebene mufs durch 0 gehen, d. h. es findet die in dem Hauptsatze ausgesprochene Bedingung Statt, dafs ein Punct in einer lineal construirten Ebene liegt. Also ist die Oberfläche, deren Gleichung $f(x, y, z) = 0$ war, durch die in dem Hauptsatze angegebene Construction erzeugbar. W. z. b. w.

In Bezug auf den letzten Theil des Satzes ist noch eine erläuternde Bemerkung hinzuzufügen. Nämlich, aus der Art, wie oben aus den Puncten f und g der Punct h durch lineale Construction erfolgte, ergiebt sich, dafs, sowohl wenn h die Summe, als auch wenn es das Product der durch die Puncte f und g ausgedrückten Zahlen darstellt, jedesmal sowohl f als g bei diesen Constructionen *einmal* angewandt wird. Ist also zur Construction von f und g der veränderliche Punct p, beziehlich, f' und g'mal angewandt, so ist p zur Construction von h im Ganzen $(f' + g')$mal angewandt. Daraus ist klar, dafs jedes Glied der Function z. B. $x^l y^m z^n$ durch einen Punct dargestellt wird, bei dessen linealer Construction der veränderliche Punct p so oft angewandt ist, als der Grad dieses Gliedes beträgt, also hier $(l + m + n)$mal. Hat man nun eine ganze rationale Function $n$ten Grades $f(x, y, z)$, und ist s der durch sie dargestellte Punct, also $\frac{os}{o\partial} = f(x, y, z)$, und construirt man zuerst die Puncte, durch welche die einzelnen Glieder der Function dargestellt werden, und darauf den Punct s, durch welchen ihre Summe dargestellt ist: so ist klar, dafs nach der angegebenen Methode, bei der linealen Construction von s, der Punct p im Ganzen $(n + m)$mal angewandt ist, wenn $n + m$ die Summe der Grade aller Glieder ist. Nach dieser Construction müfste daher die durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ dargestellte Oberfläche von $(n + m)$ter Ordnung sein, da sie doch, nach der ursprünglichen Gleichung, nur von $n$ter Ordnung ist. Dieser Widerspruch löset sich indefs sogleich, wenn man die obige Methode nur in ihrer ganzen Strenge anwendet. Nämlich,

um die Coordinaten jenes Punctes s zu finden, welcher durch $(n+m)$malige Anwendung des Puncts p lineal construirt wurde, hatten wir *vier* Coordinaten angewandt; wir fügen daher zu x, y, z noch die vierte Coordinate u hinzu, und nehmen an, dafs für $u=1$ die neuen Werthe der Coordinaten mit den alten identisch sind. Dann sind nach der obigen Beweisführung die Coordinaten von os, also auch $\frac{os}{o\partial}$, homogene Functionen $(n+m)$ten Grades von u, x, y, z: aber für $u=1$ ist $\frac{os}{o\partial} = f(x, y, z)$, also eine Function $n$ten Grades, mithin mufs $\frac{os}{o\partial}$ nothwendig die Form

$$\frac{os}{o\partial} = u^m F_n(u, x, y, z)$$

haben, wo F_n eine homogene Function $n$ten Grades ist, die für $u=1$ in $f(x, y, z)$ übergeht. Die durch Construction hervorgehende Oberfläche hat also die Gleichung

$$u^m F(u, x, y, z) = 0,$$

und die ursprüngliche Gleichung war $f(x, y, z)$ oder

$$F(u, x, y, z) = 0.$$

Die erstere Oberfläche zerfällt in m Ebenen, welche durch die Gleichung $u=0$ dargestellt sind, d. h. in m unendlich entfernte Ebenen, und in die Oberfläche $n$ter Ordnung, welche durch die letzte Gleichung dargestellt ist.

In vielen Fällen läfst sich die lineale Construction, durch welche die Function $f(x, y, z)$ erfolgt, so reduciren, dafs der Punct p bei derselben im Ganzen nicht so oft angewandt wird, als die Summe aller Grade der einzelnen Glieder beträgt. Aber im *Allgemeinen* ist eine solche Reduction nicht durchführbar. Ein Fall, wo die Reduction am leichtesten ausführbar ist, ist der einer Function *ersten* Grades. In der That stellt $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ eine Ebene dar, welche durch die Puncte $x, y, z = a, o, o;\ o, b, o;\ o, o, c$ geht. Diese Ebene ist lineal aus den Constanten a, b, c construirbar. Sind nun x, y, z die Coordinaten eines Punctes p, und man legt durch p eine Ebene, welche mit der so eben construirten parallel ist, und welche die Linie $o\partial$ in q schneidet, so ist

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = \frac{oq}{o\partial},$$

d. h. jene Function ersten Grades wird durch einen Punct dargestellt, bei dessen Construction der veränderliche Punct p nur einmal angewandt ist.

Einen Fall, wo die vollständige Reduction nicht ausführbar ist, bietet z. B. die Gleichung

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

dar. Diese Gleichung stellt ein ***zweischaliges Hyperboloïd*** vor, und ein solches gehört zu denjenigen Oberflächen zweiter Ordnung, auf welchen sich keine gerade Linien ziehen lassen. Nun werde ich später zeigen, dafs die linealen Constructionen, bei denen der veränderliche Punct zweimal angewandt wird, stets nur solche Oberflächen zweiter Ordnung liefern, auf denen sich gerade Linien ziehen lassen. Also ist die obige Gleichung nicht durch eine solche Construction darstellbar. Hingegen kann man sie in

$$(x+y)(x-y) - z^2 = 1$$

verwandeln; aus welcher Form sich sogleich ergiebt, dafs sich die Fläche durch eine lineale Construction darstellen läfst, bei welcher der veränderliche Punct 4mal angewandt wird; und die durch diese Construction erzeugte Oberfläche 4ter Ordnung zerfällt dann in die zu erzeugende Oberfläche 2ter Ordnung und in 2 unendlich entfernte Ebenen. Dasselbe gilt für alle Oberflächen zweiter Ordnung, auf denen sich keine gerade Linien ziehen lassen; denn alle diese Oberflächen lassen sich mit dem durch die obige Gleichung dargestellten zweischaligen Hyperboloïd collinear setzen.

Diese beiden Beispiele mögen genügen, um die eigenthümliche Beziehung zwischen dem Satze und seiner Umkehrung zu veranschaulichen.

Stettin, im Juli 1852.

2.

Grundsätze der stereometrischen Multiplication.

(Von dem Herrn Professor *H. Grafsmann,* Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

Im 31ten und 42ten Bande dieses Journals habe ich die Principien der *planimetrischen* Multiplication entwickelt, deren Eigenthümlichkeit darin bestand, dafs jede einfache planimetrische Construction durch eine eben so einfache Productformel dargestellt wurde. Ich werde hier das Gleiche für den *Raum* versuchen.

§. 1.

Erklärungen und Bezeichnungen.

Im Raume kommen drei Gattungen von *Elementen* vor: *Puncte, gerade Linien,* und *Ebenen,* welche ich beziehlich *Elemente erster, zweiter und dritter Stufe* nennen werde, und von denen ich die ersten beiden Gattungen, wie bisher, mit lateinischen Buchstaben, und zwar die Puncte mit kleinen, die geraden Linien mit grofsen bezeichnen werde, während zur Bezeichnung der Ebenen die kleinen griechischen Buchstaben dienen sollen. Der Buchstab n indessen soll nie einen Punct, sondern, wie gewöhnlich, eine Zahl bezeichnen. Zur Definition der stereometrischen Multiplication genügt es, das Product von je zwei jener 3 Gattungen von Elementen zu definiren. Dies giebt, da ich die Factoren vertauschbar setze, 6 Definitionen. Doch sind überall zwei Fälle zu unterscheiden; je nachdem die beiden Elemente vereinigt liegen, oder nicht. Ich sage nämlich, dafs zwei Elemente vereinigt liegen, wenn sie mehr Puncte gemein haben, als vermöge ihrer Lage im Raume nothwendig ist, d. h. ich sage, ein Punct liege mit einem Puncte, einer Geraden, einer Ebene vereinigt, eine Gerade mit einer Ebene, eine Ebene mit einer Ebene, wenn jedesmal das erstere Element in dem letzteren liegt; und eine Gerade liege mit einer Geraden vereinigt, wenn sie sich schneiden (gleich viel, ob im Endlichen oder Unendlichen).

Wenn nun zwei Elemente vereinigt liegen, so setze ich ihr stereometrisches Product Null; wobei ich voraussetze, dafs Null, mit jeder Gröfse multiplicirt, wieder Null giebt. Namentlich bedeutet

1) $ab = 0$ oder $a \equiv b$ [a congruent b],
dafs die Puncte a und b zusammenfallen;
2) $Ab = 0$ oder $bA = 0$,
dafs der Punct b in der Geraden A liegt;
3) $\alpha\beta = 0$ oder $\alpha \equiv \beta$ [α congruent β],
dafs die Ebenen α und β zusammenfallen;
4) $A\beta = 0$ oder $\beta A = 0$,
dafs die Gerade A in der Ebene β liegt;
5) $AB = 0$,
dafs sich die Geraden A und B schneiden;
6) $\alpha b = 0$ oder $b\alpha = 0$,
dafs der Punct b in der Ebene α liegt.

Wenn die Elemente nicht vereinigt liegen, so bedeutet
1) ab die durch a und b gelegte Gerade;
2) Ab oder bA die durch A und b gelegte Ebene;
3) $\alpha\beta$ die Durchschnittslinie beider Ebenen;
4) $A\beta$ oder βA den Durchschnittspunct der Geraden A und der Ebene β;
5) AB
6) αb oder $b\alpha$ } ein Element nullter Stufe, d. h.
eine Gröfse, welche die Eigenschaft hat, irgend einem Elemente als Factor beigefügt, die Lage desselben unverändert zu lassen. Ich werde zwei aufeinander fallende Elemente, (die Linien und Ebenen immer als unendlich angenommen), einander *congruent* nennen und die Congruenz durch $\equiv$ bezeichnen. Eben so werde ich zwei Elemente nullter Stufe jederzeit einander congruent nennen. *) Wenn also nun z. B. n eine Gröfse nullter Stufe und Γ ein beliebiges Element ist, so würde

$$n\Gamma \equiv \Gamma$$

sein.

Von den 6 Producten stellen die zwei ersten das Verbindungs-Element (die Verbindungsgerade, Verbindungs-Ebene) der beiden Factoren dar, die beiden folgenden das Durchschnitts-Element (Durchschnittslinie, Durchschnitts-

*) Da die Zahlen gleichfalls Gröfsen nullter Stufe sind, so würden hiernach alle Zahlen congruent sein; was mit dem *Gaufs*ischen Begriff der Congruenz in Widerspruch zu stehen scheint. Allein nimmt man den Modul unendlich klein an, was der geometrischen Auffassung entspricht, so werden in der That alle Zahlgröfsen congruent.

punct), während die 2 letzten kein besonderes räumliches Element mehr darstellen. Von den 6 Definitionen sind (1 und 3), und eben so (2 und 4), einander ***reciprok,*** d. h. aus der einen geht die andere hervor, wenn man die Begriffe Punct und Ebene, Verbinden und Durchschneiden vertauscht.

Es können nun die Producte, da sie wieder Elemente sind, aufs neue mit andern Elementen oder Producten multiplicirt und dadurch Producte mit mehreren Factoren gebildet werden. In diesem Falle lasse ich die Klammern weg, wenn die Multiplication von der Linken zur Rechten fortschreiten soll; d. h. wenn A, B, Γ beliebige Elemente sind, so ist ABΓ gleichbedeutend mit (AB)Γ, oder

$$AB\Gamma \equiv (AB)\Gamma.$$

§. 2.

Stufe der stereometrischen Producte.

Man sieht bald aus den Definitionen, dafs die Stufe des Products bei den beiden ersten Definitionen eben so grofs ist, als die Summe der Stufenzahlen beider Factoren; bei den folgenden Definitionen aber um 4 kleiner. In allen Fällen lassen also jene Stufe und diese Summe, durch 4 dividirt, ***denselben Rest,*** d. h. sie sind ***congruent*** in Bezug auf den Modul 4. Daraus folgt nachstehender Satz:

„Die Stufenzahl eines beliebigen stereometrischen Products ist der Summe der Stufenzahlen sämmtlicher Factoren congruent, in Bezug auf den Modul 4; oder jene Stufenzahl ist gleich dem kleinsten positiven Reste (Null eingerechnet), den man erhält, wenn man die Stufenzahlen sämmtlicher Factoren addirt und diese Summe durch 4 dividirt."

§. 3.

Producte mehrerer Puncte oder Ebenen.

Aus den Definitionen (1 und 2) folgt:

„Dafs das Product abc oder $a(bc)$ Null ist, wenn die 3 Puncte a, b, c in gerader Linie liegen, und dafs, wenn Dies nicht der Fall, jenes Product der durch a, b, c gelegten Ebene congruent ist;"

und reciprok folgt aus den Definitionen (3 und 4):

„Dafs das Product $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha(\beta\gamma)$ Null ist, wenn die 3 Ebenen α, β, γ eine und dieselbe gerade Linie gemein haben, und dafs, wenn Dies nicht der Fall, jenes Product dem Durchschnittspuncte der 3 Ebenen α, β, γ congruent ist."

Ferner folgt aus den Definitionen (5 und 6):

„Dafs das Product $abc\partial$ oder $a(bc\partial)$ oder $ab(c\partial)$ Null ist, wenn die 4 Puncte a, b, c, ∂ in einer Ebene liegen;"

und eben so, reciprok:

„Dafs das Product $\alpha\beta\gamma\delta$ oder $\alpha(\beta\gamma\delta)$ oder $\alpha\beta(\gamma\delta)$ Null ist, wenn die 4 Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch *einen* und denselben Punct gehen;"

und:

„Dafs, wenn Dies nicht der Fall ist, alle diese Producte Ausdrücke nullter Stufe darstellen."

§. 4.

Vertauschung und Vereinigung der Factoren.

Die Definitionen (§. 1.) lehren unmittelbar:

„Dafs man die beiden Factoren eines stereometrischen Products vertauschen und einen Factor nullter Stufe in einem stereometrischen Product beliebig stellen, oder mit andern Factoren vereinigen kann, ohne den geometrischen Sinn des Products zu ändern."

Eben so ergiebt sich aus (§. 3.) sogleich:

„Dafs man in Producten von 2 bis 4 Puncten oder Ebenen die Factoren beliebig vertauschen und vereinigen (mit Klammern umschliefsen) kann."

Es werde jetzt ein beliebiges Product von 3 Factoren betrachtet, in welchem das Product zweier dieser Factoren mit dem dritten Factor multiplicirt ist, und es werde die Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Factoren untersucht. Zuerst leuchtet aus dem so eben aufgestellten Satze hervor:

„Dafs man drei Factoren, deren Stufenzahlen zusammen kleiner als 5, oder gröfser als 7 sind, beliebig mit einander vertauschen und vereinigen darf."

Denn in diesem Falle läfst sich das Product stets als ein Product von 3 oder 4 Puncten oder Ebenen darstellen. Z. B. das Product $aB\partial$, da die Gerade B ein Product zweier Puncte, etwa b und c ist, läfst sich in der Form $a(bc)\partial \equiv abc\partial$ darstellen.

Um auch in den übrigen Fällen (wo die Stufenzahlen zusammen 5, 6 oder 7 betragen und keine gleich 4 ist), darüber urtheilen zu können, gehen wir auf die Definitionen (1 — 4) zurück. Nach der Definition (3) ist das Product der beiden Ebenen abc und ∂ab Null, wenn a, b, c, ∂ in *einer* Ebene liegen, d. h. wenn $abc\partial$ Null ist. Ist hingegen Dies nicht der Fall, so ist das Product gleich der Durchschnittskante ab beider Ebenen. Beides wird nach

der 6ten Definition durch das Product $abc\partial.ab$ ausgedrückt, indem dasselbe Null oder mit ab congruent ist, je nachdem $abc\partial$ Null ist, oder nicht. Es ergiebt sich also die Congruenz

$$(1.) \qquad abc(\partial ab) \equiv abc\partial.ab,$$

welche die Definition (3.) vollkommen darstellt. Auf gleiche Weise wird die vierte Definition durch die Formel

$$(2.) \qquad abc(\partial a) \equiv abc\partial.a$$

dargestellt. Es ist klar, dafs die Ordnung der Puncte innerhalb eines jeden dieser einzelnen Producte, da sie höchstens aus 4 Punctfactoren bestehen, gleichgültig ist, und dafs daher die Formeln (1. und 2.) nur aussagen, dafs man in den beiden dort angenommenen Fällen die 4 verschiedenen Factoren a, b, c, ∂ zu *einem* Product vereinigen kann. Aus diesen beiden Formeln, und ihren reciproken, läfst sich nun die Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Factoren leicht beurtheilen. Man erhält nämlich aus der Formel (2.) sogleich:

$$(3.) \qquad abc\partial.a \equiv abc(\partial a) \equiv ab(c\partial a) \equiv a(bc\partial a),$$

und aus der Formel (1.), für sich, oder verbunden mit (2.):

$$(4.) \qquad abc\partial.ab \equiv abc(\partial ab) \equiv ab(c\partial ab) \equiv abc(\partial a)b.$$

Die 4 congruenten Ausdrücke in der Formel (3.) liefern, paarweise einander congruent gesetzt, 6 Formeln, und diese 6 Formeln geben unmittelbar das Gesetz

$$(5.) \qquad \mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma \equiv \mathrm{A}(\mathrm{B}\Gamma),$$

wenn die Stufenzahlen A, B, Γ beziehlich 3, 1, 1, oder 2, 2, 1, oder 1, 3, 1, oder 2, 1, 2, oder 1, 2, 2, oder 1, 1, 3 sind und dabei der letzte Factor mit dem ersten einen Punct (a) gemein hat. So z. B. giebt die erste Congruenz $abc\partial.a \equiv abc(\partial a)$ die Formel (5.), wenn man $abc \equiv \mathrm{A}$, $\partial \equiv \mathrm{B}$, $a \equiv \Gamma$ setzt u. s. w. Diese 6 Fälle lassen sich unter den gemeinsamen Ausdruck bringen, dafs jede der Stufenzahlen kleiner als 4 und ihre Summe gleich 5 ist. Wenn man unter den 4 congruenten Ausdrücken in (4.) die ersten 3 zusammenpaart, und den zweiten mit dem vierten, so erhält man die Formel (5.) für den Fall dafs die Stufenzahlen beziehlich 3, 1, 2, oder 2, 2, 2, oder 2, 1, 3, oder 3, 2, 1 sind und von den Elementen A und Γ das eine ganz in dem andern liegt. Durch Reciprocität (d. h. wenn man die dritte und erste Stufe vertauscht) erhält man hieraus die Formel (5.) noch für die Stufenzahlen 1, 3, 2; 2, 3, 1 und 1, 2, 3. Diese 7 Fälle kann man unter den gemeinsamen Ausdruck bringen, dafs jede der Stufenzahlen kleiner als 4 und

ihre Summe gleich 6 ist. Endlich ergiebt sich durch Reciprocität, aus dem Falle wo die Summe der Stufenzahlen 5 ist, der, wo diese Summe 7 ist. Dabei verwandelt sich die Bedingung, dafs der erste und letzte Factor einen Punct gemeinschaftlich haben, in die Bedingung, dafs diese Factoren in derselben Ebene liegen.

Wir können, wie sich sogleich durch Vergleichung der Formeln (3) ergiebt, diese Bedingung in beiden Fällen auch so ausdrücken, dafs der erste und letzte Factor entweder Gerade in derselben Ebene sind, oder dafs der eine jener Factoren ganz in dem andern liegt.

Vertauscht man in (5) links A und B, rechts A und BΓ, was nach dem ersten Satze dieses Paragraphs gestattet ist, so erhält man die Formel

$$(6.) \quad BA\Gamma \equiv B\Gamma A;$$

welche also in demselben Umfange gilt wie (5).

Diese Resultate lassen sich in den folgenden Satz zusammenfassen.

„Die Ordnung in welcher man ein Element (B) mit zwei andern Elementen (A und Γ) vereinigt, oder fortschreitend multiplicirt, ist in folgenden 3 Fällen gleichgültig für den geometrischen Werth des gesammten Products, d. h. es ist

$$BA\Gamma \equiv B\Gamma A \quad \text{und} \quad AB\Gamma \equiv A(B\Gamma):$$

1) Wenn die Summe der 3 Stufenzahlen kleiner als 5 oder gröfser als 7 ist;

2) Wenn von jenen beiden Factoren (A und Γ) der eine ganz *in* dem andern liegt;

3) Wenn jene beiden Factoren (A und Γ) Gerade in derselben Ebene sind und der andere Factor (B) ein Punct oder eine Ebene ist."

Dieser Satz ist insofern erschöpfend, als es aufser den in demselben erwähnten Fällen keinen giebt, in welchem sich in einem nicht verschwindenden klammerlosen Producte von 3 Factoren der zweite mit dem dritten vertauschen oder vereinigen liefse, ohne dafs sich der geometrische Werth des Products änderte. Der leicht zu führende Beweis dieser Behauptung bleibt dem Leser überlassen.

Noch will ich den zweiten Theil dieses Fundamentalsatzes der stereometrischen Multiplication in Formeln kleiden, in denen schon die Bedingung mit aufgenommen ist, nämlich in

$$AB\Gamma B \equiv AB(\Gamma B) \equiv A(\Gamma B)B.$$

Denn die Factoren AB und A, und eben so (ΓB) und B, haben die Eigenschaft, dafs der eine derselben ganz in dem andern liegt: also ist die Bedingung des Satzes erfüllt und die Vereinigung oder Vertauschung der Factoren dem Satze gemäfs gestattet.

Die erste dieser Congruenzen läfst sich auf folgende Weise in Worte kleiden: Wenn in einem klammerlosen Product zwischen zwei congruenten Factoren ein dritter Factor steht, so kann man diesen mit dem folgenden durch Klammern zusammenschliefsen.

§. 5.

Besondere Umgestaltungen von Producten nullter Stufe.

Die Producte nullter Stufe, da sie, wie ich im folgenden Paragraph zeigen werde, alle algebraischen Oberflächen darzustellen vermögen, haben vor den andern Producten ein besonderes Interesse, und lassen eine Reihe von Umgestaltungen zu, die den andern Producten abgehen. Daher werde ich sie besonders ins Auge fassen.

Jedes Product, also auch das Product nullter Stufe, besteht zunächst aus 2 Factoren. Löset man nun einen dieser Factoren wieder in seine zwei Factoren auf, so erhält man 3 Factoren, deren Stufenzahlen, da das gesammte Product von nullter Stufe sein soll, eine durch 4 theilbare Summe haben müssen. Da die einzelnen Stufenzahlen stets kleiner als 4 sind, so kann die Summe nur entweder Null sein (wenn alle 3 einzeln genommen Null sind), oder 4, oder 8; in allen 3 Fällen können nach dem vorigen Paragraph die 3 Factoren beliebig vertauscht und vereinigt werden. Also:

„Wenn ein Product nullter Stufe aus 3 Factoren besteht, so können „dieselben beliebig vertauscht und vereinigt werden."

Der Sinn dieses Satzes ist der, dafs das Product, wenn es in dem einen Falle Null ist, auch jedesmal in dem andern Null sei. Hieraus folgt sogleich, dafs man in einem beliebig zusammengesetzten Product nullter Stufe jeden beliebigen Factor A auf die letzte Stelle bringen kann, ohne dafs er noch von einer Klammer umschlossen wird. Zu dem Ende hat man nur auf folgende Weise zu verfahren. Unter den beiden Factoren, aus denen das gesammte Product zunächst besteht, löse man denjenigen, welcher A enthält, in seine beiden Factoren auf; dann hat man 3 Factoren, welche man nach dem vorher aufgestellten Satze beliebig ordnen und vereinigen kann. Man stelle

nun denjenigen derselben, welcher A enthält, in die letzte Stelle und fasse die beiden andern zu einem Producte zusammen. Dies Verfahren, bei welchem jedesmal eine Klammer, die den Factor A noch umschliefst, verschwindet, läfst sich also so lange fortsetzen, bis A von keiner Klammer mehr umschlossen wird; und dann ist A zugleich an den Schlufs gerückt. Wendet man das Verfahren auf den ersten Factor (A_1) eines fortschreitenden Products nullter Stufe an, so erhält man die Formel

$$A_1 A_2 \ldots A \equiv A_n \ldots A_2 A_1,$$

und vertauscht man rechts A_1 mit dem gesammten vorhergehenden Factor, so erhält man das Product

$$\equiv A_1 (A_n \ldots A_2)$$

d. h.:

„Ein fortschreitendes Product nullter Stufe darf man umkehren, oder es in zwei Theile sondern und den letzten umgekehrt in Klammern schliefsen."

Es werde endlich ein beliebig zusammengesetztes Product nullter Stufe $\mathfrak{A}$ betrachtet, welches noch einen Factor nullter Stufe $\mathfrak{B}$ enthält. Es sei dies das Product, welches übrig bleibt, wenn man in $\mathfrak{A}$ den Factor $\mathfrak{B}$ wegläfst und mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet; dann mufs $\mathfrak{C}$, wie leicht zu sehen, gleichfalls von nullter Stufe sein; und da man, nach dem vorhergehenden Paragraph, einen Factor nullter Stufe beliebig stellen und mit andern Factoren vereinigen, oder von ihnen trennen kann, so kann man dann auch den Factor $\mathfrak{B}$ isolirt an den Anfang stellen und erhält:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Wenn nun $\mathfrak{B}$ nicht Null ist, so folgt aus der Definition der Gröfsen nullter Stufe, $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}$. Daraus ergiebt sich, dafs $\mathfrak{A}$ dann, und nur dann, Null ist, wenn entweder $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ verschwindet. Also: „Wenn ein Product nullter Stufe noch einen Factor nullter Stufe enthält, so kann man diesen als den einen Factor des gesammten Products setzen; und als den andern dasjenige Product, welches übrig bleibt, wenn man aus dem gesammten Product diesen Factor wegläfst. In diesem Falle ist das gesammte Product dann, und nur dann, Null, wenn der eine oder der andere dieser Factoren Null ist."

§. 6.

Stereometrische Gleichungen algebraischer Oberflächen.

Der Satz, welchen ich in der vorhergehenden Abhandlung über die *lineale* Erzeugung der algebraischen Oberflächen aufgestellt habe, lautete: „Wenn die Lage eines Puncts x (oder einer Ebene), im Raume, dadurch beschränkt ist, dafs zwei Gerade, welche durch lineale Constructionen aus x und einer Reihe fester Elemente hervorgehen, in derselben Ebene liegen sollen, so ist der *Ort* von x eine algebraische Oberfläche; und zwar ist sie ein Gebilde $n$ten Grades, wenn bei den Constructionen x im Ganzen $n$mal angewandt wird. Umgekehrt läfst sich jede algebraische Oberfläche auf die angegebene Weise erzeugen."

Es kommt darauf an, diesen Satz durch *stereometrische* Formeln darzustellen; wobei ich den reciproken Fall, dafs statt des Punctes x eine Ebene vorkommt, übergehe, da er sich durch Reciprocität stets von selbst ergiebt. Die zwei Geraden, welche nach dem Satze in derselben Ebene liegen sollen, seien P und Q, so ist die Gleichung der Oberfläche:

$$PQ = 0.$$

Jede der Geraden P und Q soll, nach dem Satze, aus x und einer Reihe fester Elemente durch lineale Construction erfolgen. Die Erzeugung neuer Elemente durch lineale Construction läfst sich auf die folgenden vier Fälle, in denen aus zwei Elementen ein drittes entsteht, zurückführen: 1) Wenn aus zwei Puncten ihre Verbindungs-Gerade; 2) Wenn aus einem Punct und einer Geraden ihre Verbindungs-Ebene; 3) Wenn aus zwei Ebenen ihre Durchschnittslinie; 4) Wenn aus einer Ebene und einer Geraden ihr Durchschnittspunct entsteht. Also: wenn aus zwei Elementen durch lineale Construction ein drittes entsteht, so ist das letztere jedesmal das stereometrische Product der beiden ersteren; und zwar im Sinne der Definitionen (1 bis 4). Und umgekehrt: jedes stereometrische Product, welches durch die Definitionen (1 bis 4) bestimmt wird, d. h. welches nicht von nullter Stufe ist, entsteht durch lineale Construction aus seinen beiden Factoren. Hieraus folgt, dafs sich jedes Element, welches aus x und einer Reihe fester Elemente durch lineale Constructionen erfolgt, bei denen $n$mal x angewandt wird, als ein stereometrisches Product darstellen läfst, in welchem $n$mal als Factor x vorkommt; und dafs, umgekehrt, jedes stereometrische Product, welches $n$mal als Factor x enthält und aufserdem nur feste Elemente zu Factoren hat, und

welches weder selbst von nullter Stufe ist, noch einen Factor nullter Stufe enthält, durch lineale Constructionen aus x und den festen Elementen sich erzeugen läfst; und zwar in der Art, dafs x bei diesen Constructionen $n$mal angewandt wird.

Betrachtet man nun ein beliebiges, gleich Null gesetztes Product nullter Stufe, welches $n$mal den veränderlichen Punct x als Factor enthält, aber keinen Factor nullter Stufe mehr einschliefst, so kann man es immer auf die Form bringen, dafs es zunächst als Product zweier Geraden sich zeigt. Nämlich: enthält das Product irgend eine feste Gerade als Factor, so kann man nach dem vorigen Paragraph diese Gerade in die letzte Stelle des Products bringen, ohne dafs dieselbe noch von einer Klammer umschlossen wird. Der andere Factor mufs dann, da die Summe der Stufenzahlen durch 4 theilbar ist, gleichfalls eine Gerade sein; und das Product hat die verlangte Form. Kommt aber in dem Product keine feste Gerade vor, so müssen die festen Elemente Puncte oder Ebenen sein; Punct und Ebene kann man aber als Producte einer festen Geraden in eine Ebene oder in einen Punct darstellen, und dann wie vorher die feste Gerade in die letzte Stelle bringen. Die Gleichung wird also die Form

$$\boldsymbol{PQ} = 0$$

erhalten, wo in $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ der veränderliche Punct x im Ganzen $n$mal als Factor vorkommt; $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ ergeben sich also durch lineale Constructionen, bei welchen $n$mal x angewandt wird; und da die Gleichung $\boldsymbol{PQ} = 0$ die Bedingung ausdrückt, dafs die Geraden $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ in derselben Ebene liegen, so ist nach dem angeführten Satze der *Ort* des Punctes x eine Oberfläche $n$ter Ordnung.

Hat man endlich eine Gleichung

$$\mathfrak{P} = 0,$$

in welcher $\mathfrak{P}$ ein Product nullter Stufe ist, welches $n$mal x als Factor enthält, aber noch Factoren nullter Stufe in sich schliefst, so kann man $\mathfrak{P}$, nach dem vorigen Paragraph, stets auf die Form $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots$ bringen, wo $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ... Producte nullter Stufe sind, die keinen Factor nullter Stufe mehr enthalten. Es komme x in jenen Producten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ... beziehlich $\mathfrak{b}$mal, $\mathfrak{c}$mal, $\mathfrak{d}$mal vor, so hat man $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\cdots = n$ und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots = 0.$$

Die Gleichung drückt aus, dafs entweder $\mathfrak{B} = 0$, oder $\mathfrak{C} = 0$, oder $\mathfrak{D} = 0$, ... ist. Diese einzelnen Gleichungen stellen aber, nach dem so eben Erwiesenen, Oberflächen von bter, cter, dter Ordnung dar u. s. w. Also ist der durch die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$ bedingte *Ort* von x eine Oberfläche $n$ter Ordnung, welche in jene Oberflächen bter, cter ... Ordnung zerfällt. Demnach haben wir folgenden Satz:

„Die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$, in welcher $\mathfrak{P}$ ein Product nullter Stufe ist, welches $n$mal den veränderlichen Punct x als Factor enthält, giebt, als *Ort* von x, eine Oberfläche $n$ter Ordnung; und umgekehrt läfst sich jede algebraische Oberfläche durch eine solche Gleichung darstellen."

Stettin, im Juli 1852.

3.

Über die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen.

(Von dem Herrn Prof. *H. Grafsmann,* Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

Die drei Gattungen räumlicher Elemente, nämlich die ***Puncte,*** oder die Elemente erster Stufe; die ***geraden Linien,*** oder die Elemente zweiter Stufe; die ***Ebenen,*** oder die Elemente dritter Stufe, gestatten sechs verschiedene Combinationen zu zweien, welche sich, je nachdem die Summe der Stufenzahlen kleiner als 4, oder gröfser als 4, oder gleich 4 ist, in drei Gruppen sondern lassen. Für jede dieser sechs Combinationen habe ich in der vorhergehenden Abhandlung den Begriff des stereometrischen Products beider Elemente bestimmt. Wenn die Summe der Stufenzahlen ***kleiner*** als 4 war, so war das stereometrische Product die Verbindung beider Elemente (Verbindungslinie und Verbindungs-Ebene), wenn ***gröfser*** als 4, ihr Durchschnitt. Beide Bestimmungen ergaben sich als zu einander reciprok. Wenn die Summe der Stufenzahlen ***gleich*** 4 war, so setzten wir als das Product der Elemente eine Gröfse, welche, einem Elemente als Factor beigefügt, die Lage des Elements unverändert läfst. Wir nannten eine solche Gröfse eine Gröfse ***nullter*** Stufe. In diesem Sinne ergab sich, dafs die Stufe eines beliebig zusammengesetzten Products stets der Summe der Stufenzahlen seiner sämmtlichen Factoren congruent ist, in Bezug auf den Modul 4. Alle 6 Arten der Producte wurden gleich Null gesetzt, wenn die Elemente, welche die Factoren des Products bildeten, vereinigt lagen. ***Congruent*** hingegen nannten wir zwei Elemente, wenn sie (als unendlich angenommen) sich gegenseitig deckten; zwei Gröfsen nullter Stufe aber nannten wir congruent, wenn sie entweder beide Null, oder beide ungleich Null waren. Wir untersuchten dann, in wie weit man die Form eines Products verändern könne, so dafs das ursprüngliche und das neue Product einander congruent seien. Es ergaben sich dabei besonders folgende Formeln und Sätze, in welchen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, Γ, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{P}$ Elemente darstellen, deren Stufenzahlen beziehlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_n$, 0 sein mögen:

$$1. \quad AB \equiv BA,$$

$$2. \quad AB\Gamma \equiv A\Gamma B \equiv A(B\Gamma) \text{ etc.},$$

$$\text{wenn } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} < 5, \text{ oder } > 7 \text{ ist.}$$

$$3. \quad AB\Gamma B \equiv AB(\Gamma B) \equiv A(\Gamma B)B,$$

$$4. \quad A_1A_2 \ldots A_n \equiv A_n \ldots A_2A_1 \equiv A_1(A_n \ldots A_2),$$

$$\text{wenn } \mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\cdots+\mathfrak{a}_n \equiv 0 \pmod 4 \text{ ist.}$$

5. $\mathfrak{P}=0$ ist die Gleichung einer Oberfläche *n*ter Ordnung, wenn $\mathfrak{P}$ ein Product nullter Stufe ist, in welchem der die Oberfläche construirende Punct *n* mal als Factor vorkommt.

6. Wenn ein Product nullter Stufe $\mathfrak{P}$ noch einen Factor nullter Stufe $\mathfrak{Q}$ enthält, und $\mathfrak{R}$ das Product bezeichnet, welches aus $\mathfrak{P}$ übrig bleibt, wenn man darin $\mathfrak{Q}$ wegläfst; so ist

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{Q}\mathfrak{R}$$

und die Gleichung

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\mathfrak{R}=0 \text{ zerfällt in } \mathfrak{Q}=0 \text{ und } \mathfrak{R}=0.$$

Der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes ist, den allgemeinen Satz über die lineale Erzeugung der Oberflächen, wie er in (5.) enthalten ist, möglichst anschaulich und für die Anwendung bequem zu gestalten und auseinander zu legen. Dabei ist vermöge (6.) nur nöthig, den Fall zu berücksichtigen, wo $\mathfrak{P}$ *keinen* Factor nullter Stufe mehr enthält, d. h. wo bei der fortschreitenden Bildung des Products $\mathfrak{P}$ die Summe der Stufenzahlen nicht eher durch 4 theilbar wird, als bis das ganze Product gebildet ist. Ich werde daher in den nächsten fünf Paragraphen den Fall, wo die Summe der Stufenzahlen durch 4 theilbar ist, ein für alle Mal ausschliefsen. Wie bisher, sollen die kleinen lateinischen Buchstaben (mit einziger Ausnahme des *n*) ***Puncte*** bezeichnen, die grofsen lateinischen Buchstaben ***gerade Linien***, die kleinen griechischen Buchstaben ***Ebenen***.

§. 1.

Product eines beweglichen Elements, mit einem festen.

Das bewegliche Element sei x, ξ oder X, das feste Element a, x oder A. Indem ich die 6 Producte, welche, unter Ausschlufs der Stufensumme 4, aus einem der beweglichen und einem der festen Elemente sich bilden lassen, betrachte, will ich auf den Grad der Beweglichkeit des entstehenden Products und auf die entstehenden projectivischen Grundgebilde

aufmerksam machen. Ich nenne ein Element *n*fach, oder im *n*ten Grade beweglich, wenn von den Zahlcoëfficienten, durch welche seine Lage bestimmt ist, n auf ganz unabhängige Weise veränderlich sind. Also ist, z. B. ein Punct in einer Geraden einfach beweglich, ein Punct in einer Ebene zweifach, ein Punct im Raume dreifach. Eben so verhält es sich mit einer Ebene, welche durch eine feste Gerade, oder durch einen festen Punct gehen, oder frei im Raume beweglich sein soll. Ferner, eine Gerade, wenn sie in einer festen Ebene liegen und zugleich durch einen festen Punct derselben gehen soll, ist einfach beweglich; wenn sie in einer festen Ebene liegen, oder durch einen festen Punct gehen soll, ist sie zweifach beweglich; wenn sie eine andere Gerade schneiden soll, dreifach, und wenn sie sich frei im Raume bewegen darf, vierfach. Nimmt man nun an, x, ξ, X seien frei im Ranme beweglich, so ist

1) xa zweifach beweglich und stellt einen Strahlenbüschel (im Raume) dar;
2) $\xi\alpha$ ist zweifach beweglich und stellt eine liniirte Ebene dar;
3) xA ist einfach beweglich und stellt einen Ebenenbüschel (erster Stufe) dar;
4) ξA ist einfach beweglich und stellt eine punctirte Gerade dar;
5) Xa ist zweifach beweglich und stellt einen Ebenenbüschel zweiter Stufe dar;
6) $X\alpha$ ist zweifach beweglich und stellt eine punctirte Ebene dar.

Hierzu füge ich, der Übersicht wegen, noch die folgenden beiden Producte dreier Factoren:

7) $xA\alpha$
8) ξAa

} sind einfach beweglich und stellen ebene Strahlenbüschel dar, und zwar 7) als Durchschnitt eines Ebenenbüschels und einer Ebene 8) als Verbindung einer punctirten Geraden mit einem Puncte.

Diese projectivischen Grundgebilde sind paarweise zu einander reciprok. Ich werde diejenigen derselben, deren Element einfach oder zweifach beweglich ist, beziehlich, Gebilde erster oder zweiter Stufe nennen; wodurch die Benennung des fünften Gebildes gerechtfertigt scheint.

Um die Nothwendigkeit dieser Unterscheidung in projectivische Gebilde erster und zweiter Stufe nachzuweisen, führe ich gelegentlich folgenden, leicht zu erweisenden Satz an: Bei zwei Gebilden derselben Art, welche zu einander projectivisch sein sollen, kann man, je nachdem sie von der ersten oder zweiten Stufe sind, 3 oder 4 beliebige Elemente des einen Gebildes, mit eben so vielen der andern als entsprechend setzen; aber dann ist zu jedem Elemente des einen Gebildes das entsprechende des andern bestimmt; vorausgesetzt jedoch,

dafs im zweiten Falle von den gewählten 4 Elementen desselben Gebildes keine 3 einem und demselben Gebilde erster Stufe angehören.

Es ist bei der Auffassung dieser projectivischen Gebilde wichtig, festzuhalten, dafs die punctirte Ebene und die liniirte Ebene, und eben so der Ebenenbüschel zweiter Stufe und der räumliche Strahlenbüschel, nur in Bezug auf die Gattung der Elemente sich unterscheiden; so dafs nämlich zwei projectivische punctirte Ebenen zugleich projectivisch sind in Bezug auf die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punctenpaare, und zwei projectivische Ebenenbüschel zugleich in Bezug auf die Durchschnittsstrahlen der entsprechenden Ebenenpaare; und umgekehrt. Wo es auf die Unterscheidung der ursprünglichen Elemente nicht ankommt, werde ich, mit ***Steiner***, die ersteren Gebilde, ohne Weiteres, Ebenen, die letzteren räumliche Strahlenbüschel nennen.

§. 2.

Fortschreitende Multiplication eines frei beweglichen Punctes x, mit einer Reihe fester Elemente.

Es lassen sich zwei Hauptfälle unterscheiden, je nachdem das entstehende Product einfach, oder zweifach beweglich ist. Es werde der letzte Fall zuerst betrachtet. Der Punct x kann in diesem Falle nur mit einem Puncte multiplicirt werden, da das Product mit einer Geraden einfach beweglich ist. Es sei dieser Punct a. Das Product xa ist nur dann Null, wenn x in a fällt; in jedem andern Falle liefert xa eine Gerade. Diese Gerade könnte nun mit einem Puncte b, oder einer Ebene α, multiplicirt werden; allein xab kann zugleich als Product von x mit der Geraden ab betrachtet werden, und würde daher einfach beweglich sein. Es ergiebt sich also das Product $xa\alpha$. Wenn a in α liegt, so lassen sich nach Formel (3.) a und α vertauschen, und man erhält $x\alpha.a$; was in einen variablen Factor nullter Stufe und einen festen Punct zerfällt. Da wir auch diesen Fall ausschlossen, so bleibt nur übrig, dafs a aufserhalb α liegt; wo dann $xa.\alpha$ eine punctirte Ebene darstellt. Der Punct $xa.\alpha$ kann nun wieder mit einem Puncte b multiplicirt werden. Wenn b in α liegt, so läfst sich wiederum b mit α vertauschen und man erhält $xab\alpha$ oder $x(ab)\alpha$, und man kommt wieder auf den Fall der einfachen Beweglichkeit zurück. Von hier an wiederholt sich dieselbe Schlufsreihe, und man gelangt zu dem Satze:

„Wenn ein frei beweglicher Punct x fortschreitend mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt wird, so geht dann, und nur dann, ein zweifach

bewegliches Product hervor, wenn diese Reihe mit einem Puncte beginnt, abwechselnd aus Puncten und Ebenen besteht, und dabei jeder Punct aufserhalb der ihm vorhergehenden und der ihm nachfolgenden Ebene liegt. Das Product wird in diesem Falle nur Null, wenn x mit dem ersten Puncte jener Reihe zusammenfällt."

Ferner

„Wenn der Punct x mit einer abwechselnden Reihe von Puncten und Ebenen multiplicirt wird, und einer dieser Puncte in die ihm nachfolgende oder vorhergehende Ebene fällt, so kann man diese beiden Factoren vertauschen, und erhält im ersten Falle einen variablen Factor nullter Stufe, der mit einem festen Element multiplicirt ist, im letzten Falle ein einfach bewegliches Product, indem an die Stelle des Puncts eine Gerade tritt."

§. 3.

Fortsetzung.

Es werde jetzt der Fall der einfachen Beweglichkeit betrachtet. Am einfachsten ist es hier, x fortschreitend mit einer Reihe von Geraden $A, B, \ldots$ zu multipliciren. Das Product xA wird Null, wenn x in A fällt. Dies ausgeschlossen, stellt xA einen Ebenenbüschel dar. Wenn nun von den folgenden Geraden keine die vorhergehende schneidet (der unendlich entfernte Durchschnittspunct immer als solcher mit gerechnet), so stellt das Product abwechselnd Ebenenbüschel und punctirte Geraden dar. Ist nun das Product, bis zu irgend einem Factor hin, $\equiv p$, und es schneiden sich die beiden folgenden festen Geraden A und B, so sei dieser Punct c, und die Geraden seien ac und bc. Dann erhält man $pAB \equiv pac(bc) \equiv pacb.c$ [nach Formel 3]; d. h. es zerfällt das Product in einen variablen Factor nullter Stufe und einen festen Punct. Das Entsprechende geschieht im reciproken Falle. Also ergiebt sich folgender Satz:

„Wenn ein frei beweglicher Punct mit einer Reihe fester Geraden multiplicirt wird, so ist das Product dann, und nur dann, einfach beweglich, wenn keine dieser Geraden die folgende schneidet; und das Product wird in diesem Falle nur dann Null, wenn x in die erste Gerade jener Reihe fällt. Wenn jedoch eine der Geraden die folgende schneidet, so kann man statt dieser beiden Geraden eine Ebene und einen Punct setzen; und zwar die Ebene in der sie liegen und den Punct in dem sie sich

schneiden, und es zerfällt dadurch das Product in einen variablen Factor nullter Stufe und in ein festes Element."

Ich werde jetzt zeigen, dafs man jeden Fall, in welchem ein beweglicher Punct x, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt, ein einfach bewegliches Element, und zwar einen Punct oder eine Ebene giebt, auf den so eben betrachteten Fall zurückführen kann.

Es sei zuerst p ein zweifach bewegliches Product, und eben so $p\alpha$; dann trete noch die Gerade B hinzu. Es sei b der Punct, in welchem die Gerade B die Ebene α schneidet, und $\alpha \equiv Ab$, $B \equiv bc$, so ist:

$$p\alpha B \equiv pa(Ab)(bc) \equiv pa(Ab)bc \text{ [nach Formel 2].}$$

Aber

$$pa(Ab)b \equiv pabAb \text{ [nach Formel 3], also}$$

$$p\alpha B \equiv pabAbc \equiv p(ab)A(bc) \text{ [nach Formel 2].}$$

Man hat also statt des Puncts a und der Ebene α gerade Linien erhalten. Nämlich, wenn man den Durchschnittspunct von B und α durch b bezeichnet, so kann man statt des Punctes a die Gerade ab und statt der Ebene α eine beliebige Gerade dieser Ebene setzen, die jedoch nicht durch den Punct b gehen darf. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man zu folgendem Satze:

„Wenn ein beweglicher Punct mit einer Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen multiplicirt wird und auf die letzte Ebene eine feste Gerade folgt, so kann man statt aller fester Puncte und Ebenen Gerade setzen. Nämlich wenn man das ganze Product umkehrt und das umgekehrte Product nach und nach construirt, so erhält man eine Reihe von Hülfspuncten, die in den festen Ebenen liegen, und eine Reihe von Geraden, die durch die festen Puncte gehen. Diese Geraden kann man statt der festen Puncte setzen, und statt jeder Ebene eine Gerade, die in dieser Ebene liegt, aber nicht durch den in der Ebene liegenden Hülfspunct geht."

In Formeln ausgedrückt, würde der Satz:

$$x a_1 \alpha_1 a_2 \alpha_2 \ldots a_n \alpha_n B \equiv x(a_1 c_1) A_1 (c_1 c_2) A_2 \ldots (c_{n-1} c_n) A_n B$$

lauten, wenn

$$B\alpha_n \equiv c_n,\ c_n a_n \alpha_{n-1} \equiv c_{n-1},\ \ldots\ c_2 a_2 \alpha_1 \equiv c_1,$$
$$\alpha_n \equiv c_n A_n,\ a_{n-1} \equiv c_{n-1} A_{n-1},\ \ldots\ \alpha_1 \equiv c_1 A_1$$

ist. Noch will ich bemerken, dafs sich auch die gefundene Form des Products noch auf die Form $x(a_1 c_1)\boldsymbol{B}_1(c_2 c_3)\boldsymbol{B}_3 \ldots$ reduciren läfst, wo $\boldsymbol{B}$, die Durchschnittslinie der Ebenen α_1 und α_2 (oder $c_1 \boldsymbol{A}_1$ und $c_2 \boldsymbol{A}_2$), $\boldsymbol{B}_3$ die der Ebenen α_3 und α_4 ist; u. s. w.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dafs sich jedes Product von x mit einer Elementenreihe, die mit einer Geraden beginnt, auch, falls das Product wieder ein Punct oder eine Ebene sein soll, stets auf das Product von x mit einer Reihe von lauter Geraden zurückführen läfst. Durch die Multiplication mit einer Reihe fester Geraden geht entweder ein Punct p, oder eine Ebene hervor. Da beide Fälle zu einander reciprok sind, so braucht man nur den einen zu betrachten. Wir nehmen an, der Punct p sei entweder $\equiv x$, oder er sei durch Multiplication von x mit einer Reihe von festen Geraden entstanden. Es trete noch eine Gerade $\boldsymbol{A}$ hinzu, so ist $p\boldsymbol{A}$ eine Ebene. Soll nun zu dieser Ebene ein Element, welches keine Gerade ist, hinzutreten, so kann dieses Element (da die Stufensumme 4 ausgeschlossen ist) nur eine Ebene α sein. Nun ist $p\boldsymbol{A}\alpha$ eine Gerade. Diese kann mit einer Ebene β, oder mit einem Punct b zusammentreten: aber $p\boldsymbol{A}\alpha\beta$ ist nach Formel (2) $\equiv p\boldsymbol{A}(\alpha\beta)$, also wäre $p\boldsymbol{A}$ wieder mit einer Geraden $(\alpha\beta)$ multiplicirt; gegen die Annahme. Es bleibt daher nur übrig, das Product $p\boldsymbol{A}\alpha b$ zu betrachten. Es sei c der Durchschnitt von $\boldsymbol{A}$ und α, und $\boldsymbol{A} \equiv ac$, $\alpha \equiv c\boldsymbol{B}$, so ist $p\boldsymbol{A}\alpha b \equiv p\,(ac)\,(c\boldsymbol{B})\,b \equiv pac\,(c\boldsymbol{B})\,b$ [nach F. 2] $\equiv pac\,\boldsymbol{B}cb$ [nach F. 3] $\equiv p\,(ac)\,\boldsymbol{B}\,(cb)$. Also ist auch dies Product auf ein Product mit lauter festen Geraden reducirt. Wir haben demnach folgenden Satz erlangt:

„Jedes Product eines frei beweglichen Punctes x mit einer Reihe fester Elemente läfst sich, wenn das Product ein einfach bewegliches Element, und zwar ein Punct oder eine Ebene ist, in der Form darstellen, dafs alle festen Elemente Gerade sind."

Fasset man die gefundenen Sätze mit den reciproken Sätzen zusammen, so erhält man folgenden allgemeinen Satz:

„Wenn ein frei bewegliches Element, und zwar ein Punct, oder eine Ebene, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt und das Product wieder ein bewegliches Element, und zwar ein Punct oder eine Ebene ist, so kann man statt der Reihe der festen Elemente entweder eine Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen, oder eine Reihe fester Geraden setzen, je nachdem das Product ein zweifach oder einfach bewegliches Element ist; und zwar haben beide Reihen nothwendig die

Eigenschaft, dafs keine zwei aufeinander folgenden Elemente vereinigt liegen. Findet hingegen diese vereinigte Lage Statt, so nimmt der Grad der Beweglichkeit mindestens um 1 ab."

Dieser Satz reicht für die Multiplication eines beweglichen Elements mit einer Reihe fester, vollkommen aus. Denn ist das bewegliche Element eine Gerade, so mufs diese entweder mit einer festen Ebene, oder mit einem festen Puncte in Combination treten, und giebt dann einen zweifach beweglichen Punct, oder eine zweifach bewegliche Ebene; und für diese wurde die weitere Combination mit festen Elementen bereits betrachtet. Und ist das Product eine Gerade, so kann dieselbe nur durch Multiplication zweier Puncte oder zweier Ebenen entstanden sein; und für beide wurden die Gesetze aufgestellt.

§. 4.

Lineale Bewegung offener Figuren.

Es sei zunächst die Aufgabe, das bewegliche Product eines beweglichen Elements mit einer Reihe fester Elemente für den Fall zu construiren, dafs sowohl das bewegliche Element, als das Product, ein Punct, oder eine Ebene ist. In diesem Falle kann man nach (§. 2.) statt der Reihe der festen Elemente, entweder eine Reihe abwechselnder Puncte und Ebenen, oder eine Reihe von Geraden einführen; und zwar so, dafs keine zwei aufeinander folgende Elemente dieser Reihen vereinigt liegen. Ich werde mich für die Darstellung dieser Construction des Begriffs der *offenen Figur* bedienen. Darunter verstehe ich (S. dieses Journal Bd. 36. S. 5) eine Reihe von Puncten und Geraden, in welcher auf jeden Punct eine durch ihn gehende Gerade, und auf jede Gerade ein in ihr liegender Punct folgt, gleich viel ob diese Geraden oder Puncte in derselben Ebene liegen, oder nicht. Das Anfangs-Element der Reihe kann, eben so wie das End-Element derselben, ein Punct, oder eine Gerade sein. Alle Zwischen-Elemente der Reihe (d. h. welche nicht Grenz-Elemente derselben sind), nenne ich Seiten oder Ecken der offenen Figur, je nachdem sie Gerade, oder Puncte sind. Das Product eines beweglichen Punctes x mit einer abwechselnden Reihe von Puncten und Ebenen $a_1, \alpha_1, \ldots a_n, \alpha_n$ betrachtet, deren keine zwei aufeinander folgende vereinigt liegen), ist Null, wenn x in a_1 liegt; in jedem andern Falle ist das Product die letzte Ecke einer offenen Figur, deren Angriffspunct x ist, deren Seiten durch die festen Puncte $a_1 \ldots a_n$ gehen und deren Ecken in den festen Ebenen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ liegen. Betrachtet man, zweitens, das Product eines beweg-

lichen Punctes x mit einer geraden Anzahl gerader Linien $A_1, B_1, \ldots A_n, B_n$, (deren keine zwei aufeinander folgende sich schneiden), so zeigt sich dasselbe $=$ Null, wenn x in der Geraden A_1 liegt; in jedem andern Falle ist das Product die letzte Ecke einer offenen Figur, deren Anfangspunct x ist, deren Seiten durch die Geraden $A_1, \ldots A_n$ gehen und deren Ecken in der Geraden $B_1, \ldots B_n$ liegen. Ferner werde das Product von x mit einer ungeraden Anzahl gerader Linien $A_1, B_1, \ldots A_n, B_n, A_{n+1}$ betrachtet, (deren keine zwei aufeinanderfolgende sich schneiden). Legt man nun, vorausgesetzt, dafs x nicht in A_1 liegt, in welchem Falle das Product Null ist, eine offene Figur hindurch, deren Anfangspunct x ist, deren Seiten durch die Geraden $A_1, \ldots A_{n+1}$ gehen und deren Ecken in den Geraden $B_1, \ldots B_n$ liegen, so ist durch eine bestimmte Lage des Anfangspuncts x zwar die letzte Ecke in B_n bestimmt, aber nicht die letzte Seite, die durch A_{n+1} geht; vielmehr ist der geometrische Ort derselben eine Ebene, und diese Ebene ist eben jenem Producte congruent.

Es bleiben nur noch die reciproken Fälle zu betrachten, wo statt des Punctes x eine Ebene ξ eintritt. Man könnte hier der offenen Figur ihr reciprokes Gebilde substituiren; doch ist es in vielen Fällen vortheilhaft, auch hier die offene Figur zu Grunde zu legen. Hat man das Product $\xi a_1 a_1 \ldots a_n a_n$ zu construiren, so läfst sich eine offene Figur zu Grunde legen, deren Anfangsstrahl in der Ebene ξ liegt, deren Ecken in den Ebenen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ liegen und deren Seiten durch die Puncte $a_1, \ldots a_n$ gehen. Wenn die Ebene ξ fest ist (ohne mit α_1 zusammenzufallen), so ist dennoch die ganze offene Figur beweglich, und der geometrische Ort ihrer letzten Seite ist eine Ebene, welche dem obigen Producte congruent ist. Ferner ist das Product $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n$ der geometrische Ort der letzten Seite einer offenen Figur, deren Anfangsstrahl in der Ebene ξ liegt, deren Ecken in den Geraden $A_1 \ldots A_n$ liegen, und deren Seiten durch die Geraden $B_1 \ldots B_n$ gehen. Endlich, das Product $\xi A_1 B_1 \ldots A_n B_n A_{n+1}$ ist der letzten Ecke einer Figur congruent, deren Anfangsstrahl in der Ebene ξ liegt, deren Ecken in den Seiten $A_1 \ldots A_{n+1}$ liegen und deren Seiten durch die Geraden $B_1 \ldots B_n$ gehen.

Ich werde alle diese sechs Bewegungen der offenen Figuren *lineale* nennen. Es giebt also zwei Arten der linealen Bewegung offener Figuren, deren erste darin besteht, dafs sich alle Ecken und Seiten in festen geraden Linien bewegen, die andere darin, dafs sich alle Ecken in festen Ebenen bewegen, während alle Seiten durch feste Puncte gehen. Bei beiden Bewegungen soll

wieder der Fall ausgeschlossen bleiben, wo irgend zwei feste Elemente, in denen sich zwei aufeinander folgende Elemente der offenen Figur bewegen sollen, vereinigt liegen. Im ersteren Falle sind alle Ecken der offenen Figur einfach beweglich, im letzteren zweifach; daher will ich jene erstere Art der linealen Bewegung gleichfalls eine ***einfache***, letztere eine ***zweifache*** nennen. In beiden Fällen ist jede Ecke (und eben so der geometrische Ort jeder Seite) einer lineal beweglichen offenen Figur einem Producte congruent, dessen erster Factor der geometrische Ort des Anfangs-Elements ist, und dessen folgende Factoren nach der Reihe diejenigen festen Elemente sind, welchen die Ecken und Seiten der offenen Figur, bis zu der betrachteten Ecke (oder Seite) hin, vereinigt liegen sollen.

§. 5.

Construction der Producte mit mehreren variablen Factoren, durch Verkettungen offener Figuren.

Wenn zwei variable Factoren zusammentreten, so sind (immer noch das Product nullter Stufe ausgeschlossen) folgende Fälle möglich: Entweder *a*) es treten zwei Puncte zusammen, oder *b*) zwei Ebenen, oder *c*) eine Gerade und ein Punct, oder *d*) eine Gerade und eine Ebene.

In den ersten zwei Fällen ist das Product eine Gerade. Diese Gerade kann dann entweder mit einem Punct oder einer Ebene zusammentreten. Dies giebt, wenn man in jedem dieser Fälle nur die 3 Stufenzahlen nebeneinander schreibt, folgende 4 Schemata:

$$111,\ 113,\ 331,\ 333.$$

In den Fällen *c*) und *d*) soll eine Gerade mit einem Punct oder einer Ebene zusammentreten. Da die Gerade aber wieder nur als Product zweier Puncte oder zweier Ebenen entstanden sein kann, so erhält man hier dieselben 4 Schemata. Es werde in jedem Schema das erste der 3 Elemente mit a oder α, das zweite mit b oder β, das dritte mit c oder γ bezeichnet, so erhält man die den 4 Schematen entsprechenden Producte:

$$abc,\ ab\gamma,\ \alpha\beta c,\ \alpha\beta\gamma,$$

die wir nach der Reihe mit

$$\varrho,\ r,\ \sigma,\ s$$

bezeichnen wollen, indem das erste und dritte eine Ebene, das zweite und vierte einen Punct darstellt.

Ich will jetzt zunächst annehmen, dafs sowohl $a, b, c,$ als auch α, β, γ variabel sind, und dafs jedes dieser Elemente dadurch entstanden sei, dafs ein variabler Punct, oder eine variable Ebene, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt wurde. Eben so will ich annehmen, dafs die entstandenen Producte (ϱ, r, σ, s) späterhin noch mit Reihen fester Elemente multiplicirt werden sollen. Hierdurch ist Alles auf die Betrachtung des vorigen Paragraphs reducirt.

Zuerst betrachte man das Product $\varrho \equiv abc$. Hier können nach (§. 4) a, b und c als die letzten Ecken dreier lineal beweglicher offener Figuren angesehen werden; die Lage der Endstrahlen der 3 offenen Figuren ist willkürlich, nur dafs sie beziehlich durch a, b, c gehen müssen. Die Ebene ϱ endlich soll als solche angesehen werden, die hernach noch mit einer Reihe fester Elemente zu multipliciren ist. Dieser Multiplication wurde in (§. 4) eine offene Figur zu Grunde gelegt, deren Anfangsstrahl in der Ebene ϱ beweglich ist. Also treten hier 4 offene Figuren hervor; und zwar gehen die Endstrahlen der ersten 3 offenen Figuren, einzeln genommen, durch die Puncte $a, b, c,$ und der Anfangstrahl der vierten liegt in der Ebene $\varrho \equiv abc$. Da die Lage jener Endstrahlen im Übrigen willkürlich ist, so kann man sie leicht so annehmen, dafs die 4 in Betracht kommenden Grenzstrahlen paarweise zusammenfallen. Es sei p ein in ab beweglicher Punct, so läfst sich die Gerade ab als der gemeinschaftliche Endstrahl der beiden ersten offenen Figuren, und die Gerade pc als der Endstrahl der dritten und der Anfangsstrahl der vierten setzen. Denn durch diese Annahmen werden die Bedingungen erfüllt, dafs die Endstrahlen beziehlich durch a, b, c gehen und der Anfangsstrahl in der Ebene abc beweglich sein soll. Die eigenthümliche Lage der 4 Grenzstrahlen in dem Producte abc ist also die, dafs sie paarweise zusammenfallen und das eine Paar mit dem andern vereinigt liegt, d. h. von ihm geschnitten wird.

Betrachtet man ***zweitens*** das Product $r \equiv ab\gamma$, so sind hier a und b als letzte Ecken zweier offener Figuren anzusehen. Die Endstrahlen derselben, welche beziehlich durch a und b gehen müssen, im Übrigen aber willkürlich sind, kann man wieder zusammenfallen lassen, d. h. ab als den gemeinschaftlichen Endstrahl derselben setzen. Die Ebene γ ist nach (§. 4.) als geometrischer Ort der letzten Seite einer offenen Figur zu betrachten. Der Endpunct dieser offenen Figur ist im Übrigen willkürlich; nur dafs er in der letzten Seite, also hier in der Ebene γ liegen mufs. Der Punct $r \equiv ab\gamma$, d. h. der Punct, in welchem die Gerade ab die Ebene γ schneidet, wird,

wenn r noch mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt werden soll, zum Anfangspuncte einer vierten offenen Figur. Da der Endpunct der dritten in γ willkürlich war, so kann man ihn mit dem Anfangspunct (r) der vierten zusammenfallen lassen. Also fallen in diesem Falle zwei Grenzstrahlen (ab) zusammen, und eben so zwei Grenzpuncte (r), und diese liegen mit jenen vereinigt. In den beiden bisher betrachteten Fällen fallen also die 4 in Betracht kommenden Grenz-Elemente paarweise zusammen, und das eine Paar liegt mit dem andern vereinigt. Der Unterschied ist nur der, dafs im ersten Falle alle 4 Grenz-Elemente, im zweiten Falle zwei derselben ***Strahlen*** sind, die beiden andern ***Puncte.***

Es werde jetzt das *dritte* Product $\sigma \equiv \alpha\beta c$ betrachtet. Hier ist nach (§. 4.) die Ebene α als der geometrische Ort der letzten Seite einer offenen Figur anzusehen, deren Endpunct willkürlich in dieser Seite, also auch willkürlich in der Ebene α liegt. Eben so ist β als der geometrische Ort der letzten Seite einer offenen Figur zu betrachten, deren Endpunct willkürlich in β angenommen werden kann. Man kann daher einen in der Kante $\alpha\beta$ beweglichen Punct p als gemeinschaftlichen Endpunct jener beiden offenen Figuren setzen. Ferner ist c als die letzte Ecke einer offenen Figur zu betrachten, deren Endstrahl willkürlich durch c geht. Wir setzen pc als diesen Endstrahl. Endlich die Ebene $\sigma \equiv \alpha\beta c$, d. h. die Ebene, welche durch den Punct c und die Kante $\alpha\beta$ gelegt ist, wird, wenn sie noch mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt werden soll, zu dem geometrischen Orte des Anfangsstrahls einer vierten Figur. Da p in $\alpha\beta$ beweglich ist, so ist σ der geometrische Ort von cp; man kann also cp als Anfangsstrahl der vierten offenen Figur setzen. Es sind demnach, wie im vorhergehenden Falle, zwei der Grenz-Elemente Strahlen, und die beiden andern sind Puncte; jene Grenzstrahlen (cp) fallen zusammen; eben so diese Grenzpuncte (p), und diese liegen mit jenen vereinigt. Der Unterschied zwischen diesem und dem vorhergehenden Falle ist nur der, dafs das Anfangs-Element der vierten Figur dort ein Punct, hier ein Strahl ist.

Das *vierte* Product endlich war $s \equiv \alpha\beta\gamma$. Hier ist jede der Ebenen α, β, γ als geometrischer Ort der Endseite einer offenen Figur zu betrachten, deren Endpunct also in jener Ebene willkürlich angenommen werden kann. Man kann daher den Durchschnittspunct (s) der 3 Ebenen α, β, γ als gemeinschaftlichen Endpunct der 3 offenen Figuren setzen; zugleich ist dieser

Punct Anfangspunct der vierten. Also sind dann alle 4 Grenz-Elemente Puncte, welche in einem Punct s zusammenfallen. Auch in diesem Falle kann man sagen, dafs die 4 Grenz-Elemente paarweise zusammenfallen und das eine Paar mit dem andern vereinigt liegt. Dies ist also das Gemeinschaftliche in allen vier Fällen. Im ersten Falle sind alle Grenz-Elemente Strahlen, im letzten, Puncte; in den beiden mittleren Fällen sind zwei Grenz-Elemente Strahlen, die beiden andern Puncte; und zwar ist das Anfangs-Element der vierten Figur im zweiten Falle ein Punct, im dritten ein Strahl.

Es wurde oben angenommen, dafs $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma,$ dadurch entstanden seien, dafs ein variabler Punct, oder eine variable Ebene, mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt sei; wobei es gleichgültig ist, ob diese Reihe aus einem, oder aus mehren Elementen besteht. Das erlangte Resultat bleibt indessen bestehen, auch wenn jene Bedingung nicht erfüllt wird. In der That ist z. B. a zwar variabel, aber nicht durch Multiplication eines beweglichen Elements mit einem oder mehreren festen Elementen entstanden: also können wir dennoch a als den Anfangspunct einer offenen Figur setzen, an den sich aber sogleich der Endstrahl derselben anschliefst; und die oben gezogenen Folgerungen bleiben bestehen. Durch das Wegfallen der constanten Factoren ist nur das Wegfallen der Ecken und Seiten der offenen Figur bedingt, und diese besteht blofs aus den beiden Grenz-Elementen. Eben so, wenn die Ebene α zwar variabel ist, aber nicht durch Multiplication eines beweglichen Elements mit einem oder mehreren festen Elementen entstanden ist, kann man dennoch α als den geometrischen Ort des Anfangsstrahls einer offenen Figur setzen, an welchen sich aber sogleich der Endpunct derselben anschliefst. Die offene Figur besteht dann wiederum nur aus den beiden Grenz-Elementen; in den übrigen Folgerungen wird nichts geändert. Ganz auf dieselbe Weise kann man die Annahme, dafs die entstehenden Producte noch hernach mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt werden sollen, ganz wegfallen lassen.

Ferner wurde oben angenommen, dafs in jedem der 4 Producte alle 3 Factoren variabel sind. Sind alle 3 constant, so ist auch ihr Product constant und kann also ohne Weiteres als eins der festen Elemente gesetzt werden. Sind 2 derselben constant, so ist dann das variable Element entweder fortschreitend mit 2 festen Elementen multiplicirt, oder mit deren Product, d. h. mit Einem festen Element. In beiden Fällen setzt sich die an das variable Element sich anschliefsende offene Figur nur fort. Es bleibt also nur der Fall zu betrachten, wo eins der 3 Elemente fest ist, die beiden andern beweglich sind.

Dieser Fall erfordert um so mehr Beachtung, da er bei der Erzeugung der Oberflächen bei weitem der häufigste ist. Angenommen also, es sei etwa der Punct a, den wir bisher als beweglich setzten, constant, so tritt kein anderer Unterschied hervor, als dafs der durch a gehende Strahl, welcher bisher als Endstrahl einer offenen Figur sich zeigte, jetzt durch den festen Punct a geht, oder, anders ausgedrückt, dafs die Ecke a, welche bisher beweglich war, jetzt fest wird. In dem vorher gefundenen Resultate wird im Übrigen nichts geändert. Ja auch der Wort-Ausdruck desselben kann unverändert bleiben, wenn man den festen Punct a, nebst dem von ihm ausgehenden Strahle, gleichfalls als offene Figur setzt; und zwar den Strahl als Endstrahl derselben. Hierbei ist es gleichgültig, ob man den festen Punct a als Anfangspunct der offenen Figur setzt, oder als eine Ecke derselben, indem man dieser noch beliebige feste Seiten und Ecken vorangehen läfst. Immer kann man die ganze Figur, mit Ausnahme des durch a gehenden willkürlichen Endstrahles, als unbeweglich annehmen. Wir nennen eine solche offene Figur, da sie von dem veränderlichen Elemente unabhängig ist, zum Unterschiede von den früher betrachteten, eine ***unabhängige*** offene Figur. Ist zweitens eine der Ebenen, etwa α, constant, so wird der in α liegende Punct, welcher bisher als Endpunct einer offenen Figur sich zeigte, jetzt ein in der festen Ebene α liegender Punct. Man wird daher auch diesen Punct als Endpunct einer offenen Figur setzen können; indem man eine solche offene Figur, deren Endpunct in einer festen Ebene liegt, gleichfalls ***unabhängig*** nennt.

Von hier aus gelangt man sogleich zur Construction eines beliebigen Products, welches das bewegliche Element x beliebig oft als Factor enthält, indem man den Begriff der Verkettung offener Figuren, wie er von mir (S. dieses Journal Bd. 42. S. 190) der Erzeugung ebener Curven zum Grunde gelegt ist, nach Anleitung der so eben gegebenen Entwickelung auf den Raum überträgt. Wenn man nämlich einen beweglichen Punct x zum Anfangspuncte mehrerer offener Figuren macht, dann aus dreien derselben, oder aus zweien und einer unabhängigen offenen Figur, eine neue offene Figur in der Art bildet, dafs die 4 Grenz-Elemente (nämlich die 3 End-Elemente der 3 ersteren und das Anfangs-Element der neuen) paarweise zusammenfallen, während zugleich das eine Paar mit dem andern vereinigt liegt, und dann fortfährt, die jedesmal noch übrigen offenen Figuren auf die angegebene Art zusammenzuschliefsen, bis sich zuletzt alle variablen offenen Figuren zu einer einzigen vereinigt haben: so nenne ich das ganze System dieser offenen

Figuren eine ***Verkettung*** derselben; und zwar eine Verkettung $n$ten Grades, wenn n offene Figuren von dem Anfangs-Element der Verkettung ausgehen. Wir sagen ferner, dafs eine Verkettung offener Figuren im Raume sich ***lineal*** bewege, wenn alle abhängigen offenen Figuren, aus denen sie besteht, sich lineal bewegen. Mittels dieser Begriffe läfst sich nun das Resultat dieses Paragraphs in dem folgenden Satze aussprechen:

„Jedes Product, welches $n$mal den variablen Punct x als Factor enthält, und welches von erster oder dritter Stufe ist, aber keinen Factor nullter Stufe einschliefst, läfst sich durch eine lineal bewegte Verkettung $n$ten Grades in der Art darstellen, dafs für jeden Punct x das Product, entweder der letzten Ecke der Verkettung, oder der Ebene, in welcher die letzte Seite derselben beweglich ist, congruent sei. Und umgekehrt läfst sich die letzte Ecke oder die Ebene der letzten Seite jeder Verkettung $n$ten Grades, durch ein solches Product darstellen.

§. 6.

Erzeugung der algebraischen Oberflächen durch lineale Bewegung geschlossener Verkettungen.

Es werde jetzt endlich ein beliebiges Product nullter Stufe betrachtet, welches $n$mal x als Factor enthält, aber keinen Factor nullter Stufe einschliefst. Ich habe in dem vorhergehenden Aufsatze gezeigt, dafs man in einem solchen Producte jeden Factor, also auch x, ohne Klammern nach der letzten Stelle bringen kann. Dann erhält das Product die Form ϖx, wo ϖ ein Product dritter Stufe ist, welches $(n-1)$mal den Punct x als Factor enthält. Hat man nun die Gleichung

$$\varpi x = 0,$$

so drückt sie aus, dafs der Punct x in der Ebene ϖ liegt. Die Ebene ϖ aber läfst sich nach dem vorigen Paragraph als die Ebene darstellen, in welcher die Endseite einer Verkettung $(n-1)$ten Grades beweglich ist. Also drückt die Gleichung $\varpi x = 0$ die Möglichkeit aus, jene Seite durch den Punct x zu legen, oder, anders ausgedrückt, die Möglichkeit, das End-Element der Verkettung mit dem Anfangs-Element derselben zusammenfallen zu lassen. Wir nennen eine solche Verkettung, deren End-Element mit ihrem Anfangs-Element zusammenfällt, eine ***geschlossene*** Verkettung; und zwar $n$ten Grades, wenn n offene Figuren von dem Anfangs-Elemente (x) ausgehen (die letzte,

welche x zum End-Elemente hat, eingerechnet). Dann verwandelt sich der Satz 5. der Einleitung in folgenden Satz:

„Der Anfangspunct einer sich lineal bewegenden geschlossenen Verkettung $n$ten Grades beschreibt eine Oberfläche $n$ter Ordnung,"

und umgekehrt:

„Jede algebraische Oberfläche läfst sich als Ort einer sich lineal bewegenden geschlossenen Verkettung darstellen."

Stettin, im Juli 1852.

4.

Die stereometrische Gleichung zweiten Grades, und die dadurch dargestellten Oberflächen.

(Von Herrn Professor *H. Grafsmann,* Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

Wenn ein stereometrisches Product nulter Stufe, welches m mal einen veränderlichen Punct x als Factor enthält, gleich Null gesetzt wird, so ist der dadurch bedingte geometrische Ort von x, wie ich in den früheren Aufsätzen nachgewiesen habe, eine Oberfläche $n$ter Ordnung. Ich will der Kürze wegen eine solche Gleichung eine ***stereometrische Gleichung nten Grades*** nennen. Es ist also der geometrische Ort eines Puncts x, welcher einer stereometrischen Gleichung zweiten Grades genügt, eine Oberfläche zweiter Ordnung. Ich werde hier diese Gleichung und die dadurch ausgedrückte Erzeugung der Oberfläche zweiter Ordnung näher erörtern.

§. 1.

Die allgemeine Form der stereometrischen Gleichung zweiten Grades.

Die stereometrische Gleichung zweiten Grades hat die Form

$$\mathfrak{P} = 0,$$

wo $\mathfrak{P}$ ein stereometrisches Product nullter Stufe ist, welches den veränderlichen Punct x zweimal als Factor enthält. Da man in einem Product nullter Stufe jeden Factor auf die letzte Stelle bringen kann, und zwar so, dafs er von keiner Klammer mehr umschlossen wird (S. stereometr. Multiplic. §. 5), so läfst sich dies auf den Factor x anwenden, und die Gleichung zweiten Grades nimmt die Form

$$\varpi x = 0 \text{ oder, anders geschrieben, } x\varpi = 0$$

an, welche ausdrückt, dafs der Punct x in der Ebene ϖ liegt.

Da ϖ noch den Factor x enthält, so kann man in der Gleichung $x\varpi = 0$ den in ϖ enthaltenen Factor x ohne Klammer auf die letzte Stelle bringen, und erhält dann die Form

$$xRx = 0,$$

wo R eine Reihe constanter Factoren bezeichnet, mit welchen fortschreitend

multiplicirt werden soll. Und zwar wird, da in einem Producte nullter Stufe die Summe der Stufenzahlen sämmtlicher Factoren durch 4 theilbar ist, die Summe der Stufenzahlen aller in R enthaltener Factoren, durch 4 dividirt, 2 zum Rest lassen. Das Product xR stellt ein Element dritter Stufe, also eine Ebene dar; folglich wird man (wenn nicht etwa xR sich in einen variablen Factor nullter Stufe und in einen constanten Factor zerfällen läfst), vermöge des in dem vorhergehenden Aufsatze (§. 3.) erwiesenen Gesetzes, statt R entweder eine Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen, welche mit einem Puncte beginnt, oder eine Reihe fester Geraden setzen können. Allein im ersteren Falle würde xR entweder von der ersten, oder von der zweiten Stufe sein, je nachdem jene Reihe mit einer Ebene, oder einem Puncte schliefst. Es bleibt also nur der zweite Fall übrig, d. h. es läfst sich stets statt R eine Reihe gerader Linien setzen; und zwar mufs die Anzahl derselben, da die Summe der Stufenzahlen durch 4 dividirt 2 zum Rest lassen mufs, ungerade sein. Folglich zeigt sich die Gleichung in der Form

$$(1.) \quad xAB\,A_1B_1 \ldots A_nB_nCx = 0,$$

wo $A, B \ldots$ gerade Linien sind. Wenn insbesondere xR sich in einen variablen Factor nullter Stufe und in einen constanten Factor auflösen läfst, so wird der erstere die Form $x\alpha$ haben müssen, wo α eine Ebene ist, und der letztere wird eine constante Ebene sein. Diese sei β; alsdann haben wir

$$x\alpha.\beta x = 0.$$

Es zerfällt dann die Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Ebenen. Aber auch diesen Fall kann man der Gleichungsform (1.) unterordnen. In der That: es seien A und B irgend zwei Gerade der Ebene α, die sich in einem Punct c schneiden, welcher zugleich in der Ebene β liegt, und C sei irgend eine Gerade in β, die aber nicht durch c geht, so stellt die Gleichung

$$xABCx = 0$$

eine in diese beiden Ebenen α und β zerfallende Oberfläche zweiter Ordnung dar. Diese Form aber ordnet sich der Form (1.) unter, wenn man $n=0$ setzt. Es ist also die Form (1.) die ganz allgemeine Form der stereometrischen Gleichung zweiten Grades.

§. 2.

Geometrische Deutung der stereometrischen Gleichung zweiten Grades.

Wenn das Product $xAB \ldots A_nB_n$ nicht Null ist, so stellt dasselbe einen Punct in B_n dar, den wir p_n nennen wollen. Eben so stellt dann das

Product $xAB \ldots A_rB_r$ für jeden Index r, von 0 bis n, einen Punct dar, der p_r heifsen soll. Dann folgt sogleich

$$p_{r-1}A_rB_r \equiv p_r.$$

Diese Gleichung drückt aus, dafs der Punct p_r in der Geraden B_r liegt, und in der durch p_{r-1} und A_r gelegten Ebene. Das Letztere läfst sich auch so ausdrücken, dafs die Gerade $p_{r-1}p_r$ die Gerade A_r schneidet. Es bilden also die Puncte x, p, p_1, $\ldots$ p_n eine offene Figur, welche mit dem Puncte x beginnt, deren Ecken $p \ldots p_n$ in den Geraden $B \ldots B_n$ liegen, und deren Seiten xp, pp_1, $\ldots$ $p_{n-1}p_n$ von den Geraden $A \ldots A_n$ geschnitten werden. Und wenn der Anfangspunct x dieser offenen Figur gegeben ist, so ist ihr Endpunct p_n genau bestimmt und stellt das Product $xAB \ldots A_nB_n$ dar; immer unter der Voraussetzung, dafs das Product nicht Null ist. Ist hingegen zwar das Product $xAB \ldots A_{r-1}B_{r-1}$ ungleich Null, aber $xAB \ldots A_rB_r$ gleich Null, d. h. $p_{r-1}A_rB_r = 0$, so liegt p_{r-1} entweder in A_r, oder B_r liegt in der durch p_{r-1} und A_r gelegten Ebene. In beiden Fällen hat jeder Punct p_r der Geraden B_r die Eigenschaft, dafs die Gerade $p_{r-1}p_r$ die Gerade A_r schneidet; d. h.: Der Endpunct p_r einer offenen Figur, deren Anfangspunct x ist, deren Ecken $p \ldots p_r$ in den Geraden $B \ldots B_r$ liegen, und deren Seiten von den Geraden $A \ldots A_r$ geschnitten werden, ist in diesem Falle innerhalb der Geraden B_r ganz willkürlich. Dasselbe gilt dann aber offenbar für die Ecke p_n der ganzen offenen Figur $xpp_1 \ldots p_n$. Also:

„Das Product $xAB \ldots A_nB_n$ wird jedesmal durch eine offene Figur $xpp_1 \ldots p_n$, deren Ecken $p \ldots p_n$ in den Geraden $B \ldots B_n$ liegen, und deren Seiten $xp, \ldots p_{n-1}p_n$ von den Geraden $A \ldots A_n$ geschnitten werden, in der Art dargestellt, dafs, wenn jenes Product nicht Null ist, die Ecke p_n genau bestimmt und jenem Producte congruent ist; dafs hingegen, wenn jenes Product Null ist, die Ecke p_n willkürlich in B_n angenommen werden kann."

Betrachtet man nun die Gleichung zweiten Grades

$$(1.) \quad xAB \ldots A_nB_nCx = 0,$$

so sieht man, dafs sie, wenn $xAB \ldots A_nB_n$ nicht Null ist, ausdrückt, dafs $p_nCx = 0$ ist, d. h., dafs sich durch p_n und x eine Gerade legen läfst, welche die Gerade C schneidet; d. h., es sind dann in der geschlossenen Figur $xp \ldots p_nx$, alle Ecken, aufser x, in der Geraden $B \ldots B_n$ beweglich, und die Seiten xp, $\ldots$, $p_{n-1}p_n$, p_nx werden von den Geraden $A \ldots A_n$, C geschnitten. Ist aber das Product $xAB \ldots A_n = 0$, so wird auch jedesmal das ganze Product zu Null, und also wird die Gleichung (1.) befriedigt.

In diesem Falle kann nun p_n in B_n willkürlich angenommen werden. Legt man durch x und C eine Gerade, welche die Gerade B_n trifft, und setzt den Punct, in welchem sie dieselbe trifft, p_n, so genügt die geschlossene Figur $xp \ldots p_n x$ auch in diesem Falle der oben ausgesprochenen Bedingung. Also haben wir den Satz:

„Wenn sich eine veränderliche geradlinige Figur $(xpp_1 \ldots p_n x)$ im Raume so bewegt, dafs alle Seiten $(xp, pp_1, \ldots p_{n-1}p_n, p_n x)$ von festen Geraden $(A, A_1, \ldots A_n, C)$ getroffen werden und alle Ecken $(p, p_1 \ldots p_n)$, aufser einer (x), in festen Geraden $(B, B_1, \ldots B_n)$ liegen, so beschreibt diese eine Ecke (x) eine Oberfläche zweiter Ordnung; und zwar eine geradlinige, deren Gleichung

$$xAB \ldots A_n B_n C x = 0$$

ist."

Dafs die Oberfläche eine geradlinige, d. h. eine solche ist, auf welcher sich gerade Linien ziehen lassen, folgt unmittelbar aus der Gleichung, da derselben z. B. durch jeden Punct x der Geraden A Genüge geschieht. Die besonderen Fälle, namentlich auch der, wo die Oberfläche zweiter Ordnung unbestimmt wird, sollen in den folgenden Paragraphen abgehandelt werden.

§. 3.

Projectivische Deutung der Gleichung zweiten Grades.

Man nehme an, dafs in der Gleichung (1.) keine der constanten Geraden die vorhergehende oder nachfolgende Gerade schneide, und betrachte unter dieser Vosaussetzung das Product $xAB \ldots A_n B_n C$, welches wir der Kürze wegen auch mit xR bezeichnen, und in welchem x zunächst frei im Raume beweglich angenommen wird. Dann stellt, wenn x nicht in A liegt, xA eine Ebene des durch die Axe A gelegten Ebenenbüschels dar, xAB den jener Ebene entsprechenden Punct der Geraden B, welche mit jenem Ebenenbüschel perspectivisch ist, $xABA_1$ die entsprechende Ebene eines Ebenenbüschels, der mit jenen beiden Gebilden perspectivisch ist, u. s. f.; xR endlich die entsprechende Ebene eines Ebenenbüschels, welcher mit allen früheren Gebilden, namentlich auch mit dem Ebenenbüschel xA, projectivisch ist: so nämlich, dafs xR und xA entsprechende Ebenen dieser Büschel sind. Denn sagt die Gleichung (1.), die jetzt in der Form $xRx = 0$ sich zeigt, aus, dafs die der Ebene xA entsprechende Ebene xR durch den Punct x geht, d. h. dafs x in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen liegt. Also ist

jede Durchschnittslinie zweier entsprechender Ebenen jener beiden Büschel eine Linie der durch die Gleichung $xRx = 0$ dargestellten Oberfläche, und da auch alle Puncte x der Geraden A in zwei entsprechenden Ebenen liegen, so besteht die Oberfläche aus der Gesammtheit jener Linien. Also:

„Die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen zweier projectivischer Ebenenbüschel bilden eine (geradlinige) Oberfläche zweiter Ordnung."

§. 4.

Reduction der Gleichung zweiten Grades auf die einfachsten Formen.

Wenn zuerst in der Gleichung (1.) irgend zwei aufeinander folgende feste Gerade z. B. A_r und B_r sich schneiden, so kann man, nach den Gesetzen der stereometrischen Multiplication (§. 3.), statt derselben eine Ebene und einen Punct setzen; nämlich die ***Ebene,*** in welcher die Geraden liegen, und den Punct, in welchem sie sich schneiden. Ist α_r jene Ebene und a_r dieser Punct, so verwandelt sich die Gleichung (1.) in

$$xAB \ldots A_{r-1}B_{r-1}\alpha_r . a_r A_{r+1}B_{r+1} \ldots A_n B_n C x = 0;$$

wo der zwischengesetzte Punct die beiden Factoren nullter Stufe scheidet. Statt des ersten dieser beiden Factoren kann man auch $x(\alpha_r B_{r-1}A_{r-1} \ldots BA)$ schreiben. Ist nun entweder $\alpha_r B_{r-1}A_{r-1} \ldots BA$, oder $a_r A_{r+1}B_{r+1} \ldots A_n B_n C$ Null, so genügt jeder beliebige Punct x der obigen Gleichung. Die durch sie dargestellte Oberfläche zweiter Ordnung ist also gänzlich unbestimmt; der Punct x ist keiner seine Lage beschränkenden Gleichung unterworfen. Die einfachste Form der Gleichung (1.), welche den Punct x ganz unbestimmt läfst, ist

$$(a.) \qquad xAx = 0.$$

Sind die beiden Producte $\alpha_r B_{r-1}A_{r-1} \ldots BA$ und $a_r A_{r+1}B_{r+1} \ldots A_n B_n C$ ungleich Null, so stellt jedes derselben eine Ebene dar. Ist α die eine, und β die andere dieser Ebenen, so verwandelt sich die Gleichung in

$$x\alpha . \beta x = 0,$$

welche in einfachster Form die in zwei Ebenen α und β zerfallende Oberfläche zweiter Ordnung darstellt, und welche jedesmal hervorgeht, sobald die Gleichung (1.) zwei aufeinander folgende Geraden enthält, die in derselben Ebene liegen, und nicht jeder Punct jener Gleichung genügt. Zieht man von einem Puncte c, der in α und β zugleich liegt, zwei Gerade in α, etwa ca und cb, und zieht in β irgend eine Gerade C, die nicht durch c geht, so läfst

sich die Gleichung auch in der Form

$$(b.) \qquad xca(cb)Cx = 0$$

darstellen. Wenn in dieser Gleichung auch die Gerade C durch den Punct c geht, so stellt sie wieder eine unbestimmte Oberfläche dar.

Ich nehme jetzt an, dafs von den Geraden A, B, ... A_n, B_n, C keine zwei aufeinander folgende in einer und derselben Ebene liegen. In diesem Falle ist, wie wir oben zeigten, die durch die Gleichung (1.) dargestellte Oberfläche der Durchschnitt zweier projectivischer Ebenenbüschel, mit den Axen A und C; und zwar geht jede Ebene des letzteren Büschels aus der entsprechenden des ersteren durch fortschreitende Multiplication mit B, A_1, B_1, ... A_n, B_n, C hervor.

Nun wird bekanntlich bei Ebenenbüscheln (erster Stufe), wie bei punctirten Geraden, durch drei Paare entsprechender Elemente zu jedem vierten Elemente des einen Gebildes das entsprechende des andern, also hier das ganze Durchschnittsgebilde bestimmt. Dies führt zu einer Reduction der Gleichung (1.).

Angenommen zuerst, es liegen die Axen A und C nicht in einer und derselben Ebene, so lege man durch A drei verschiedene Ebenen x_1A, x_2A, x_3A. Dann sind, wenn R noch immer die Reihe der Factoren A, B, ... A_n, B_n, C bezeichnet, die drei entsprechenden Ebenen: x_1R, x_2R, x_3R. Die letzteren Ebenen gehen durch die Gerade C, und da A und C nicht in einer und derselben Ebene liegen, so können die entsprechenden Ebenen x_1A und x_1R, x_2A und x_2R, x_3A und x_3R nicht zusammenfallen. Die Durchschnittslinien dieser drei Paare entsprechender Ebenen seien G_1, G_2, G_3, so schneiden diese drei Geraden jede der beiden Geraden A und C, und keine zwei jener drei Geraden können in einer und derselben Ebene liegen, weil sonst auch A und C in dieser Ebene liegen müfsten; gegen die Annahme.

Jetzt lege man durch die drei Geraden G_1, G_2, G_3 eine beliebige, aber von A und C verschiedene Gerade B', welche jene Geraden beziehlich in den Puncten g_1, g_2, g_3 schneiden mag, so läfst sich leicht zeigen, dafs die Oberflächen

$$(1.) \qquad xRx = 0 \text{ und}$$
$$(c.) \qquad xAB'Cx = 0$$

dieselbe Oberfläche darstellen. Denn die Ebenen x_1A und x_1R enthalten beide die Gerade G_1, also auch den Punct g_1: sie sind also, da die Gerade

B' mit A und mit C keinen Punct gemein hat, also auch g_1 weder in A noch in C liegt, beziehlich mit g_1A und g_1C congruent. Setzt man auch in den Ausdrücken xA und $xAB'C$, durch deren gegenseitigen Durchschnitt die Oberfläche (c.) entsteht, statt x den Punct g_1, so wird $xA \equiv g_1A$ und $xAB'C \equiv g_1AB'C \equiv g_1C$, da g_1 in B' liegt. Dasselbe gilt, wenn man g_2 oder g_3, statt g_1 setzt. Also sind die drei Ebenenpaare g_1A und g_1C, g_2A und g_2C, g_3A und g_3C Paare entsprechender Ebenen, sowohl in den Ebenenbüscheln, welche die Oberfläche (1.), als in denen, welche die Oberfläche (c.) erzeugen, mithin sind beide Oberflächen identisch. Es hat sich also ergeben, dafs sich jedesmal, wenn von den Geraden $A, B, \ldots A_n, B_n, C$ keine die nächstfolgende, und auch die letzte nicht die erste schneidet, die Reihe der Geraden in der Gleichung (1.) auf drei Gerade A, B', C zurückführen läfst, deren keine zwei in einer und derselben Ebene liegen. Die durch die Gleichung (1.) dargestellte Oberfläche besteht dann aus der gesammten Linienschaar, welche die drei Geraden A, B', C schneiden.

Es mögen ferner die Geraden A und C einen Punct g gemein haben, ohne aber zusammenzufallen. Dann haben alle Ebenen beider Büschel, also auch deren Durchschnittslinien, den Punct g gemein; folglich ist dann die Oberfläche ein ***Kegel,*** mit der Spitze g; und zwar, vermöge des allgemeinen Satzes, ein ***Kegel zweiter Ordnung.*** Dieser Kegel wird durch die Spitze und einen nicht durch die Spitze gehenden Schnitt bestimmt. Legt man nun eine Ebene α, die nicht durch die Spitze des Kegels geht, durch die beiden projectivischen Ebenenbüschel hindurch, so entstehen in dieser Ebene α' zwei projectivische ebene Strahlenbüschel, deren gegenseitiger Durchschnitt der Kegelschnitt ist, in welchem der Kegel von der Ebene α geschnitten wird. Es seien a und c die Puncte, in welchen die Axen A und C die Ebene α schneiden, und es sei die planimetrische Gleichung des Kegelschnitts:

$$xaDeFcx = 0,$$

so ist, wie man leicht sieht, die Gleichung des Kegels:

$$(\partial.) \quad \begin{cases} xgaD(ge)F(gc)x = 0 \\ \text{oder} \\ xADEFCx = 0, \end{cases}$$

wenn man $ge \equiv E$ setzt. Es zeigt sich also, dafs jeder Kegel, dessen Spitze g ist, durch eine Gleichung von der Form (1.) mit 5 Geraden sich darstellen läfst, von denen die erste und die letzte durch den Punct g gehen; wie auch umgekehrt, dafs jede Gleichung von dieser Form einen Kegel darstellt. In be-

sondern Fällen kann der vorher betrachtete Kegelschnitt in zwei gerade Linien zerfallen; dann zerfällt der Kegel in zwei Ebenen, und die Anzahl der Geraden läfst sich dann auf drei reduciren; wie wir es oben sahen.

Endlich werde der letzte Fall betrachtet, wo die beiden Axen A und C zusammenfallen. Dann nimmt die Gleichung (1.) die Form

$$xAB \ldots A_n B_n Ax = 0$$

an. Man sieht sogleich, dafs wenn dieser Gleichung irgend ein aufserhalb der Geraden A liegender Punct x genügt, auch jeder in der Ebene xA liegende Punct ihr genugthun mufs. Wir haben also nur die sämmtlichen Puncte x einer Geraden, die mit A nicht in einer und derselben Ebene liegt, z. B. B_n zu suchen, welche der obigen Gleichung genügen. Liegt aber x in B_n, so ist $xAB \ldots A_n B_n Ax \equiv xAB \ldots A_n x . B_n A$; wie sich aus den Gesetzen der stereometrischen Multiplication (§. 3.) ergiebt. Da aber B_n und A nicht in einer und derselben Ebene liegen, also ihr Product $B_n A$ nicht Null ist, so darf man diesen Factor nullter Stufe ganz weglassen, und erhält

$$xAB \ldots B_{n-1} A_n x = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine ***Oberfläche zweiter Ordnung*** dar. Die Puncte, welche dieselbe mit B_n gemein hat, sind die gesuchten Puncte, und die Ebenen, welche diese Puncte mit A verbinden, bilden die durch die gegebene Gleichung (1.) dargestellte Oberfläche. Nun können aber ***vier*** verschiedene Fälle vorkommen. Entweder die Gerade B_n liegt ganz in der zu Hülfe genommenen Oberfläche, oder sie hat zwei Puncte mit ihr gemein, oder einen, oder keinen. Im ersten Falle genügt jeder Punct x der Gleichung (1.); im zweiten Falle zerfällt die Oberfläche (1.) in die Ebenen, welche durch A und die beiden Durchschnittspuncte gelegt sind; im dritten Falle fallen die beiden Ebenen zusammen; im vierten Falle endlich genügt kein aufserhalb der Axe A liegender Punct der Gleichung (1.). Die Oberfläche besteht dann aus einer conjugirten Geraden.

Nur der letzte Fall zeigt sich hier als ein neuer. Wir können diesen Fall durch die Gleichung $xA = 0$ ausdrücken. Aber diese Gleichung ist keine stereometrische. Es läfst sich der Fall durch eine stereometrische Gleichung von der Form

$$xADEFAx = 0$$

ausdrücken, wenn hier nämlich die Gerade F so angenommen wird, dafs sie mit der durch die Gleichung $xADEx = 0$ dargestellten Oberfläche keinen

Punct gemein hat. Aber auf weniger als fünf geradlinige Factoren läfst sich die Gleichung in diesem Fall nicht bringen, da $xADAx = 0$ eine Gleichung ist, welcher durch jeden Punct x genügt wird.

§. 5.

Die Gesammtheit der durch die stereometrische Gleichung zweiten Grades darstellbaren Oberflächen; nebst ihren normalen Gleichungen.

Die stereometrische Gleichung zweiten Grades stellte, wenn sie nicht den veränderlichen Punct x ganz unbestimmt liefs, stets eine geradlinige Oberfläche dar. Wir haben nun im vorigen Paragraph gesehen, dafs sich folgende fünf Gattungen geradliniger Oberflächen zweiter Ordnung durch stereometrische Gleichungen zweiten Grades darstellen lassen:

1) Die *hyperbolische geradlinige Fläche* zweiter Ordnung; d. h. das *einschalige Hyperboloïd, und das hyperbolische Paraboloïd,*
2) Der Verein zweier verschiedener *Ebenen,*
3) Der Verein zweier zusammenfallender *Ebenen.*

In diesen drei Fällen liefs sich die stereometrische Gleichung auf die Form

$$xABCx = 0$$

bringen. Diese Form stellte die erste Fläche dar, wenn von den drei Geraden A, B, C keine zwei in einer und derselben Ebene liegen; die zweite Fläche, wenn zwei jener Geraden sich schneiden und die dritte Gerade weder in der Ebene der beiden ersteren liegt, noch durch ihren Durchschnittspunct geht; die dritte Fläche endlich, wenn die drei Geraden A, B, C in einer und derselben Ebene liegen, aber nicht durch einen und denselben Punct gehen;

4) Der *Kegel zweiter Ordnung,*
5) Die *conjugirte Gerade.*

In diesen zwei Fällen liefs sich die stereometrische Gleichung auf die Form

$$xABCDEx = 0$$

bringen. Diese Form stellte den Kegel dar, wennn A und E sich schneiden, und weder eine der vier Geraden A, B, C, D die nächst folgende Gerade schneidet, noch auch jeder Punct der Ebene α, in welcher A und E liegen, der Gleichung genügt. Der letzt erwähnte Fall tritt, wie man leicht sieht, dann, und nur dann ein, wenn die Gerade C so liegt, dafs sie die Gerade $\alpha B(\alpha D)$ schneidet. Endlich stellte diese Form die conjugirte Gerade dar, wenn A und E zusammenfallen und die Gerade D die Oberfläche, welche durch die Gleichung $xABCx = 0$ dargestellt wird, gar nicht trifft.

Die aufgestellten fünf Gattungen geradliniger Flächen zweiten Grades haben die Eigenthümlichkeit, dafs jede Fläche, welche einer dieser Gattungen angehört, sich aus jeder Fläche derselben Gattung, aber aus keiner Fläche einer andern, durch Collineation ableiten läfst. Daraus folgt, dafs wenn sich eine dieser Flächen durch eine stereometrische Gleichung zweiten Grades darstellen läfst, auch jede andere Fläche derselben Gattung auf gleiche Weise dargestellt werden kann, indem man nur statt der geraden Linien, welche in der Gleichung jener Fläche vorkommen, die geraden Linien desjenigen collinearen Systems setzen darf, in welchem statt der ersteren Fläche die zweite als jener entsprechend sich zeigt. Da nun jene fünf Gattungen die geradlinigen Flächen zweiter Ordnung vollständig umfassen, so folgt Nachstehendes:

„Jede geradlinige Fläche zweiter Ordnung läfst sich durch eine stereometrische Gleichung zweiten Grades darstellen; wie auch umgekehrt jede Gleichung der letzteren Art eine Fläche der erstern Art darstellt."

Stettin, im Juli 1852.

5.

Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen.

(Von dem Herrn Prof. *H. Grafsmann,* Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

---

§. 1.

Die verschiedenen Formen der stereometrischen Gleichungen dritten Grades.

Eine stereometrische Gleichung, welche in Bezug auf den veränderlichen Punct x vom *dritten* Grade ist, hat die Form eines gleich Null gesetzten Products nullter Stufe, welches den Punct x dreimal als Factor enthält.

In diesem Producte läfst sich nach den in der zweiten Abhandlung (Stereometr. Multiplication §. 5.) entwickelten Gesetzen der stereometrischen Multiplication, jeder beliebige Factor auf die letzte Stelle schaffen; und zwar so, dafs er von keiner Klammer mehr umschlossen wird: also läfst sich namentlich auch einer der drei Factoren x auf die letzte Stelle bringen. Dann nimmt das Product die Form $\mathrm{AB}\boldsymbol{R}x$ an, in welcher A und B Producte sind, die den Punct x nur einmal als Factor enthalten, und wo $\boldsymbol{R}$ eine Reihe constanter Factoren ist, welche fortschreitend verknüpft werden sollen.

Bezeichnet man durch $\boldsymbol{R}'$ die umgekehrte Reihe von Factoren, so kann man, nach den am angeführten Orte entwickelten Gesetzen der stereometrischen Multiplication, statt des Products $\mathrm{AB}\boldsymbol{R}x$ auch $\mathrm{AB}(x\boldsymbol{R}')$ setzen, und das Product besteht nun aus drei Factoren, deren jeder den Punct x einmal als Factor enthält. Da das Product von nullter Stufe sein soll, so mufs die Summe der drei Stufenzahlen der Factoren durch 4 theilbar sein; und da jede Stufenzahl gröfser als Null und kleiner als 4 ist, so kann die Summe derselben nur entweder 4, oder 8 sein. Im ersten Falle sind die Stufenzahlen 1, 1, 2, im zweiten 3, 3, 2. In beiden Fällen ist einer der drei variablen Factoren von zweiter Stufe. Dieser Factor zweiter Stufe kann entweder ein Product zweier Puncte, oder ein Product zweier Ebenen sein; und zwar mufs von den Factoren des Products, da dasselbe x nur einmal enthält, der eine constant, der andere variabel sein. Bringt man den constanten Factor auf die letzte Stelle des

Products, so erhält man folgende 4 Schemata:

$$1111, \quad 1133, \quad 3311, \quad 3333;$$

wo in jedem Schema die drei ersten Ziffern der Reihe nach die Stufenzahlen der drei variablen Factoren, wie sie bei der letzten Umgestaltung hervorgingen, bezeichnen, während die letzte Ziffer die Stufenzahl des constanten Factors ist. Es ergeben sich demnach folgende 4 Gleichungsformen:

$$prsa = 0, \quad pr\sigma\alpha = 0, \quad \varpi\varrho sa = 0, \quad \varpi\varrho\sigma\alpha = 0;$$

wo p, r, s variable Puncte, ϖ, ϱ, σ variable Ebenen sind, a ein constanter Punct, α eine constante Ebene ist, und wo jedes der variablen Elemente ein Product ist, welches x nur einmal, und zwar verbunden mit einer Reihe fester Elemente enthält.

Nun habe ich gezeigt (S. Abh. 3. §. 3), dafs man, wenn x mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt ist, und das Product einen Punct oder eine Ebene giebt, statt jener Reihe entweder eine Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen, die mit einem Punct beginnt und mit einer Ebene schliefst, oder eine Reihe fester Geraden setzen kann; und zwar in dem Sinne, dafs die substituirte Reihe bei jedem beliebigen x dasselbe Product giebt, wie die ursprüngliche. Die Reihe der festen Geraden, mit dem Puncte x fortschreitend verbunden, giebt eine Ebene, oder einen Punct, je nachdem die Anzahl der Geraden gerade oder ungerade ist; wohingegen die Reihe der abwechselnden Puncte und Ebenen, da sie mit einem Punct beginnt und mit einer Ebene schliefst, stets wieder einen Punct als Product liefert. Ist nun $\mathfrak{R}$ (oder $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$) eine Reihe fester Elemente, deren Stufenzahlen eine durch 4 theilbare Summe haben, und zwar entweder eine Reihe abwechselnder Puncte und Ebenen, die mit einem Puncte beginnt und mit einer Ebene schliefst, oder eine Reihe gerader Linien, deren Anzahl gerade ist, und bedeutet $\mathfrak{R}$, dafs das Element x fortschreitend mit den Elementen der Reihe $\mathfrak{R}$ multiplicirt werden soll, so läfst sich jede der Gröfsen p, r, s in der Form $x\mathfrak{R}$ darstellen, und jede der Gröfsen ϖ, ϱ, σ in der Form $x\mathfrak{R}A$, wo A eine Gerade ist, und daher auch $\mathfrak{R}$ eine Reihe von Geraden bezeichnet. Setzt man $p \equiv x\mathfrak{R}$, $r = x\mathfrak{R}_1$, $s = x\mathfrak{R}_2$, $\varpi \equiv x\mathfrak{R}A$, $\varrho \equiv x\mathfrak{R}_1 A_1$, $\sigma \equiv x\mathfrak{R}_2 A_2$, so ergeben sich die vier Gleichungsformen

(1.) $x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0$,
(2.) $x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1 A_1)(x\mathfrak{R}_2 A_2)\alpha = 0$,
(3.) $x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2 A_2)\alpha = 0$,
(4.) $x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1 A_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0$.

Hierbei mufs man wohl merken, dafs die Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, da die Stufenzahlen ihrer Factoren jedesmal eine durch 4 theilbare Summe geben, die Stufenzahl der Gröfse, mit der sie verbunden sind, unverändert lassen; dafs sie ferner überall, wo zu ihnen keine feste Gerade mehr hinzutritt, sowohl Reihen abwechselnder fester Puncte und Ebenen, als auch Reihen fester Geraden darstellen können; dafs sie hingegen, wo noch eine feste Gerade hinzutritt, jedesmal Reihen fester Geraden darstellen sollen. Die beiden ersten Gleichungen, in Worte gefafst, geben folgende Sätze:

1. Wenn ein Punct x Anfangspunct dreier offener Figuren ist, und die Ebene, welche die End-Ecken derselben verbindet, durch einen festen Punct (a) geht, während in jeder offenen Figur entweder die Seiten durch feste Puncte gehen, und die Ecken in festen Ebenen liegen, oder aber die Seiten und Ecken von festen Geraden getroffen werden: so beschreibt der Anfangspunct x eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

2. Wenn ein Punct x Anfangspunct dreier offener Figuren ist, deren drei Endseiten sich in einem und demselben Puncte einer festen Ebene (α) begegnen, und alle Ecken und Seiten der drei offenen Figuren von festen Geraden getroffen werden: so beschreibt der Anfangspunct x eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

Bestehen insbesondere die Reihen in Formel (1.) nur aus je einem Punct und einer Ebene, in Formel (4.) aus je zwei Geraden, so erhält man folgende Specialsätze:

„Wenn die Grundfläche eines veränderlichen ***Tetraëders*** und die an der Spitze liegenden Kanten desselben durch feste Puncte gehen, während die Ecken der Grundfläche in festen Ebenen liegen: so beschreibt die Spitze des Tetraëders eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***"

„Wenn von den beiden Spitzen einer dreiseitigen ***Doppelpyramide*** die eine in einer festen Ebene liegt, während die an den Spitzen liegenden Kanten, so wie die Ecken der gemeinschaftlichen Grundfläche von festen Geraden getroffen werden: so beschreibt die andere Spitze eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***"

Da wir die vier aufgestellten Gleichungsformen auf die beiden ersten reduciren werden, so ist es nicht nöthig, auch die beiden unsymmetrischeren Gleichungsformen (3. und 4.) in Worte zu fassen.

§. 2.

Reduction der vier Gleichungsformen auf die ersten beiden Formen.

Bezeichnet man in der Gleichung (3.) die Gerade $x\mathfrak{R}\,(x\mathfrak{R}_1)$ mit $\boldsymbol{Y}$ und den Punct $x\mathfrak{R}_2$ mit $\boldsymbol{r}$, so nimmt die Gleichung die Form

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}_2)\alpha = 0 \text{ an.}$$

In dem Producte $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}_2\alpha)$ kann man (S. stereom. Mult. §. 5.), da es von nullter Stufe ist und aus drei Factoren besteht, die letzten beiden in Klammern schliefsen, und erhält:

$$0 = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}_2\alpha).$$

Nun sei $\boldsymbol{a}$ der Punct, in welchem die Gerade $\boldsymbol{A}_2$ die Ebene α schneidet, und $\boldsymbol{a}_2$ irgend ein von $\boldsymbol{a}$ verschiedener Punct in $\boldsymbol{A}_2$, also $\boldsymbol{A}_2 \equiv \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}$. Dann wird

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}_2\alpha \equiv \boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}\alpha.$$

Da der Factor $\boldsymbol{a}$ in α liegt, so kann man (S. stereom. Mult. §. 4.) diese beiden Factoren vertauschen, und erhält $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}_2\alpha \equiv \boldsymbol{r}_2\alpha\boldsymbol{a}$, also:

$$0 = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_2\alpha\boldsymbol{a}).$$

Hier läfst sich wieder $\boldsymbol{a}$, als letzter Factor, aus der Klammer herausrücken, und man erhält:

$$0 = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_2\alpha)\boldsymbol{a}.$$

Da endlich $\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_2\alpha$ einen Punct darstellt, welcher aus $\boldsymbol{x}$ durch Multiplication mit einer Reihe fester Elemente hervorgegangen ist, so kann man ihn in der Form $x\mathfrak{R}_n$ darstellen. Substituirt man Dies, und setzt zugleich statt $\boldsymbol{Y}$ seinen Werth, so erhält man die Gleichungsform (1.).

In der Gleichung (4.) wollen wir $x\mathfrak{R} \equiv \boldsymbol{p}$, $x\mathfrak{R}_1 \equiv \boldsymbol{p}_1$, $x\mathfrak{R}_2 \equiv \boldsymbol{p}_2$ setzen; dann giebt dieselbe:

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{a} = 0.$$

Es wird hier zu unterscheiden sein, ob sich die Geraden $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}_1$ schneiden, oder nicht.

Angenommen zuerst, sie schneiden sich nicht, so drückt $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}_1)$ die Durchschnittslinie der beiden Ebenen $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}_1$ aus, die ich mit $\boldsymbol{Y}$ bezeichnen will, so dafs

$$\boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{p}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}_1), \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Y}\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{a} = 0$$

ist. Es genügt zwei Puncte dieser Geraden $\boldsymbol{Y}$ zu kennen. Es ist klar, dafs der Punct $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1$, d. h. der Punct, in welchem die Ebene $\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}$ die Gerade $\boldsymbol{A}_1$

schneidet, sowohl in der Ebene pA, als auch in p_1A_1 liegt; also auch in der Durchschnittslinie Y beider Ebenen. Dasselbe gilt von dem Puncte pA_1A. Beide Puncte sind, da der eine in A_1, der andere in A liegt, und A und A_1 keinen Punct gemein haben, von einander verschieden; also ist Y ihrem Producte congruent, mithin

$$Y \equiv pAA_1(p_1A_1A).$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung $Yp_2a=0$, und giebt dann dem pAA_1, was einen Punct darstellt, die Form $x\mathfrak{R}$, und dem p_1A_1A die Form $x\mathfrak{R}_1$, so erhält man:

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0;$$

was die Form (1.) ist.

Angenommen, zweitens, A und A_1 schneiden sich in einem Puncte c. Dann sei $A \equiv c$, $A_1 \equiv cb_1$, und man erhält

$$pcb(p_1cb_1)p_2a = 0.$$

Das Product $pcb(p_1cb_1)$ stellt die Durchschnittskante der beiden Ebenen pcb und p_1cb_1 dar, also eine durch c gehende Linie. Sie werde gleich sc gesetzt, also $sc \equiv pcb(p_1cb_1)$, $scp_2a = 0$.

Es sei nun α irgend eine constante Ebene, die jedoch nicht durch c geht, so lassen sich, da dann $c\alpha$ nicht Null ist, zu dem Producte nullter Stufe scp_2a noch die Factoren c und α hinzufügen; also wird

$$scp_2a \equiv scp_2a.c\alpha.$$

Hier kann man in dem Product der vier Puncte scp_2a die beiden ersten und die beiden letzten Factoren zusammenschliefsen, indem man $(sc)(p_2a)$ schreibt. Tritt nun hier noch der Factor c hinzu, so liegt derselbe in dem ersten Factor sc; folglich kann man (S. stereom. Mult. §. 4.) c mit dem zweiten Factor p_2a zusammenschliefsen, und erhält

$$scp_2a \equiv sc(p_2ac)\alpha,$$

also, indem man statt sc seinen Werth setzt:

$$0 = pcb(p_1cb_1)(p_2ac)\alpha;$$

welche Gleichung die Form (2.) hat. Demnach haben wir alle stereometrischen Gleichungen dritten Grades auf die Formen (1. und 2.) reducirt.

§. 3.

Lineale Construction der Oberflächen dritter Ordnung.

Die durch stereometrische Gleichungen dritten Grades dargestellten Oberflächen lassen sich ***lineal construiren;*** d. h., es läfst sich mittels des einzigen Postulates „Drei Puncte durch eine Ebene zu verbinden" jeder Punct einer solchen Oberfläche construiren.

In der That sei in der Formel (1.) das Product

$$(a.) \qquad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2) \equiv \varphi$$

gesetzt, so verwandelt sich die Formel (1.) in

$$(b.) \qquad \varphi a = 0.$$

Setzt man noch die Puncte $x\mathfrak{R}$, $x\mathfrak{R}_1$, $x\mathfrak{R}_2$ beziehlich p, p_1, p_2, so verwandelt sich die Congruenz $(a.)$ in $pp_1p_2 \equiv \varphi$. Multiplicirt man dieselbe auf beiden Seiten mit p, so erhält man, da $pp_1p_2p = 0$ ist, $0 \equiv p\varphi$, d. h. $0 \equiv x\mathfrak{R}\varphi$. Es ergiebt sich auf diese Weise:

$$(c.) \qquad 0 = x\mathfrak{R}\varphi = x\mathfrak{R}_1\varphi = x\mathfrak{R}_2\varphi.$$

Diese Gleichungen lassen sich (S. stereom. Mult. §. 5.) umkehren, und man erhält:

$$(\partial.) \qquad 0 = \varphi\mathfrak{R}'x = \varphi\mathfrak{R}_1'x = \varphi\mathfrak{R}_2'x;$$

wenn nämlich $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ die durch Umkehrung aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ hervorgehenden Factorenreihen sind.

Diese Gleichungen führen nun unmittelbar zu der gesuchten Construction. In der That sei φ eine beliebige, durch den Punct a gelegte Ebene, und es seien die Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ construirt, so ist der Durchschnittspunct dieser drei Ebenen, oder, falls sie mehrere Puncte gemein haben, jeder den drei Ebenen gemeinschaftliche Punct (x) ein Punct der Oberfläche dritter Ordnung. In der That: ist x den drei Ebenen gemein, so genügt x den Gleichungen $(\partial.)$, also auch den umgekehrten $(c.)$, und mithin liegen die Puncte p, p_1, p_2 in φ; d. h., wenn nicht $p.p_1.p_2$ Null ist, so ist $\varphi = pp_1p_2$. Man erhält also, da φ durch a geht, in allen Fällen:

$$pp_1p_2a = 0, \text{ d. h. } x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0;$$

d. h. x ist ein Punct der Oberfläche. Jeder durch a gelegten Ebene entspricht also, wenn $\varphi\mathfrak{R}'.\varphi\mathfrak{R}_1'.\varphi\mathfrak{R}_2'$ nicht Null ist, ***ein bestimmter,*** lineal construirbarer Punct der Oberfläche, und wenn jenes Product Null wird, so entspricht der Ebene φ die Gesammtheit der in einer Geraden (der Durchschnittslinie der

drei Ebenen) liegenden Puncte, oder, falls die drei Ebenen zusammenfallen, entsprechen ihr die sämmtlichen Puncte dieser Ebene, und jene Gerade oder diese Ebene liegen dann ganz in der Oberfläche. Umgekehrt giebt es zu jedem Puncte x der Oberfläche mindestens eine Ebene φ, aus welcher er sich lineal construiren läfst. Denn vermöge der Gleichung der Oberfläche $pp_1p_2a=0$ läfst sich stets für jedes x, was dieser Gleichung genügt, durch die Puncte p, p_1, p_2, a mindestens eine Ebene legen. Wird dieselbe mit φ bezeichnet, so sind $p\varphi$, $p_1\varphi$, $p_2\varphi$ gleich Null, also auch $\varphi\mathfrak{R}'x$, $\varphi\mathfrak{R}_1'x$, $\varphi\mathfrak{R}_2'x$; d. h. der Punct x wird aus der angenommenen Hülfs-Ebene φ construirt. Hierdurch ist also die lineale Construirbarkeit der Oberfläche dritter Ordnung völlig dargethan.

Man betrachte die Gleichung (4.)

$$(4.)\qquad x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1A_1)(x\mathfrak{R}_2A_2)\alpha$$

und es sei

$$(a.)\quad \left\{\begin{array}{l} x\mathfrak{R}A\equiv\varpi,\ x\mathfrak{R}_1A_1\equiv\varpi_1,\ x\mathfrak{R}_2A_2\equiv\varpi_2 \\ \text{und} \\ \varpi\varpi_1\varpi_2\equiv y. \end{array}\right.$$

Dann verwandelt sich die Gleichung (4.) in

$$(b.)\qquad y\alpha=0.$$

Multiplicirt man die Congruenz (*a.*) auf beiden Seiten nach und nach mit ϖ, ϖ_1, ϖ_2, so ergiebt sich:

$$(c.)\quad \left\{\begin{array}{l} 0=\varpi y=\varpi_1y=\varpi_2y,\ \text{d. h.} \\ 0=x\mathfrak{R}Ay=x\mathfrak{R}_1A_1y=x\mathfrak{R}_2A_2y; \end{array}\right.$$

also auch umgekehrt:

$$0=yA\mathfrak{R}'x=yA_1\mathfrak{R}_1'x=yA_2\mathfrak{R}_2'x;$$

wo wiederum $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ durch Umkehrung hervorgehen.

Es sei also y ein beliebiger Punct in der Ebene α und die Ebenen $yA\mathfrak{R}'$, $yA_1\mathfrak{R}_1'$, $yA_2\mathfrak{R}_2'$ seien construirt, so ist jeder Punct x, welcher in diesen drei Ebenen liegt ein Punct der durch die Gleichung (4.) dargestellten Oberfläche. Umgekehrt: wenn x ein Punct jener Oberfläche ist, so ist für ein solches x das Product $\varpi\varpi_1\varpi_2\alpha=0$. Es haben also die vier Ebenen ϖ, ϖ_1, ϖ_2, α mindestens einen Punct gemein. Derselbe sei y; dann sind ϖy, ϖ_1y, ϖ_2y gleich Null, also auch $yA\mathfrak{R}'x$, $yA_1\mathfrak{R}_1'x$, $yA_2\mathfrak{R}_2''x$ sind Null, d. h. x liegt in den drei Ebenen $yA\mathfrak{R}'$, $yA_1\mathfrak{R}_1'$, $yA_2\mathfrak{R}''$. Also läfst sich jeder Punct x der Oberfläche aus einem Punct y der Ebene α auf die ange-

gebene Weise lineal construiren; und umgekehrt liefert jeder in der Ebene α liegende Punct y mittels der angegebenen Construction einen Punct der Oberfläche.

Es ist also die lineale Construirbarkeit aller durch stereometrische Gleichungen dritten Grades dargestellten Oberflächen nachgewiesen, und die Construction angegeben.

§. 4.

Projectivische Beziehung zwischen Ebenen und räumlichen Strahlenbüscheln.

Bei den stereometrischen Gleichungen *zweiten* Grades liefs sich Alles auf die fortschreitende Multiplication mit einer Reihe von Geraden zurückführen. Es traten daher nur punctirte Gerade und Ebenenbüschel erster Stufe, überhaupt nur Gebilde erster Stufe hervor. Bei der stereometrischen Gleichung *dritten* Grades tritt zum ersten Male der veränderliche Punct mit einer Reihe von Puncten und Ebenen so in Verbindung, dafs Gebilde zweiter Stufe sich ergeben. Verfolgt man fortschreitend das Product $xa\alpha b\beta \ldots$, so stellt xa einen räumlichen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunct a dar, $xa\alpha$ eine punctirte Ebene, welche mit jenem Strahlenbüschel perspectivisch ist, $xa\alpha b$ einen räumlichen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunct b, welcher mit dem ersten Strahlenbüschel perspectivisch ist, indem die punctirte Ebene α ihren perspectivischen Durchschnitt darstellt; $xa\alpha b\beta$ ist eine punctirte Ebene, welche mit der punctirten Ebene α perspectivisch und mit xa projectivisch ist. So wird man überhaupt je zwei dieser Gebilde (räumliche Strahlenbüschel und punctirte Ebenen) zu einander projectivisch nennen können, wenn man eins aus dem andern durch Multiplication mit einer Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen ableiten kann. Doch setzen wir stets voraus, dafs keins der aufeinander folgenden festen Elemente mit einem Nachbar-Elemente vereinigt liegen darf (also der Punct nicht in der vorhergehenden oder folgenden Ebene). Es leuchtet ein, dafs diese Beziehung gegenseitig ist; so z. B. wenn aus xa das Gebilde $xa\alpha b\beta c \equiv cyc$ abgeleitet ist, so geht das ursprüngliche Gebilde durch die rückgängige Combination hervor, nämlich $xa \equiv yc\beta b\alpha a$. Analytisch betrachtet beruht die Gegenseitigkeit auf dem Gesetze, dafs $AB\Gamma B \equiv AB$ ist, wenn die Stufenzahlen von Γ und B zusammen 4 betragen und diese beiden Elemente nicht vereinigt liegen. Aus diesem Gesetze nämlich, welches früher (Stereom. Mult. §. 4.) nachgewiesen wurde, folgt sogleich durch wiederholte Anwendung:

$$AB B_1 \ldots B_n \Gamma B_n \ldots B_1 B \equiv AB,$$

wenn die Stufenzahlen je zweier aufeinander folgender Factoren $B, B_1, \ldots B_n, \Gamma$ zusammen 4 betragen. Hierin liegt dann unmittelbar die Gegenseitigkeit der Projectivität.

Betrachtet man nun zwei projectivische punctirte Ebenen, so ist klar, dafs dreien Puncten der einen Ebene, welche in gerader Linie liegen, auch drei in gerader Linie liegende Puncte der andern entsprechen. Denn dreien in gerader Linie liegenden Puncten einer Ebene werden in dem perspectivischen Strahlenbüschel drei in einer und derselben Ebene liegende Strahlen entsprechen, und diesen wiederum in der mit jedem Strahlenbüschel perspectivischen Ebene drei in gerader Linie liegende Puncte; und so fort. Es sind also die projectivischen Ebenen zugleich einander collinear. Sind daher 4 Puncte in der einen Ebene, von denen jedoch keine drei in gerader Linie liegen, vier derselben Bedingung unterworfenen Puncten der andern entsprechend, so ist dadurch nothwendig zu jedem fünften Puncte der einen Ebene der entsprechende der andern bestimmt.

Der Beweis dafür, dafs man auch in der That 4 beliebige Puncte in einer Ebene (von denen jedoch keine 3 in gerader Linie liegen) 4 solchen in einer andern projectivisch entsprechend setzen könne, ergiebt sich aus der Lösung der Aufgabe: Vier beliebige Puncte einer Ebene α (von denen keine 3 in gerader Linie liegen) aus 4 beliebigen (derselben Bedingung unterworfenen) Puncten einer andern Ebene α_1 durch Multiplication mit einer Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen abzuleiten.

Es seien a, b, c, ∂ die 4 Puncte in α und $a_1, b_1, c_1, \partial_1$ die in α_1. Verbindet man zwei entsprechende Puncte a und a_1 durch eine Gerade, und nimmt in ihr einen beliebigen Punct a_2 an, der jedoch nicht mit a_1 zusammenfällt, legt dann durch a eine beliebige Ebene α_2, die jedoch nicht mit α zusammenfällt, und multiplicirt die Puncte $a_1, b_1, c_1, \partial_1$ fortschreitend mit a_2 und α_2, so erhält man 4 Puncte $a_2, b_2, c_2, \partial_2$, von denen a_2 mit a zusammenfällt. Jetzt ziehe man die Geraden ab und $c\partial$ und nenne ihren Durchschnittspunct e, ziehe dann die entsprechenden Geraden a_2b_2 und $c_2\partial_2$, und nenne ihren Durchschnittspunct e_2. Da nun ab und a_2b_2 sich in a schneiden, also in einer und derselben Ebene liegen, so werden auch die Geraden bb_2 und ee_2 sich schneiden. Ihr Durchschnittspunct sei a_3. Jetzt lege man durch ab eine beliebige Ebene α_3, welche jedoch nicht mit α zusammenfällt, und multiplicire die Puncte $a_2, b_2, c_2, \partial_2, e_2$, fortschreitend mit a_3 und α_3, so erhält man fünf Puncte $a_3, b_3, c_3, \partial_3, e_3$, von denen drei, in gerader Linie

liegende, nämlich a_3, b_3, e_3, mit den entsprechenden Puncten a, b, e zusammenfallen, und von denen auch die Puncte c_3, ∂_3, e_3 in gerader Linie liegen, weil die entsprechenden c_2, ∂_2, e_2 in gerader Linie lagen. Nun ziehe man endlich die Geraden cc_3, $\partial\partial_3$. Dieselben werden sich, da sich die Geraden $c\partial e$, und $c_3\partial_3 e_3$ in dem Puncte $e \equiv e_3$ schneiden, gleichfalls schneiden müssen; ihr Durchschnitt sei a_4. Multiplicirt man nun die Puncte a_3, b_3, c_3, ∂_3 fortschreitend mit a_4 und α, so fallen die so hervorgehenden 4 Puncte mit a, b, c, ∂ zusammen. Also ist

$$a, b, c, \partial \equiv (a_1, b_1, c_1, \partial_1)\, a_2 \alpha_2 a_3 \alpha_3 a_4 \alpha.$$

Es läfst sich sagen, dafs nach dieser Formel die Puncte a, b, c, ∂ aus a_1, b_1, c_1, ∂_1 durch dreimalige Projection hervorgehen, indem die Puncte zuerst durch den Punct a_2 auf die Ebene α_2 projicirt sind, dann die so hervorgegangenen Projectionen durch den Punct a_3 auf die Ebene α_3, und dafs diese Projectionen schliefslich durch a_4 auf α_4 projicirt sind. Dann ergeben sich aus der vorstehenden Auflösung und durch Reciprocität folgende Sätze:

1. Vier beliebige Puncte einer Ebene, von denen keine 3 in gerader Linie liegen, lassen sich aus beliebigen 4, derselben Bedingung unterworfenen Puncten einer andern Ebene durch ***dreimalige*** Projection ableiten.

2. Wenn insbesondere ein Punct der einen Gruppe mit dem entsprechenden der andern zusammenfällt, so lassen sich die Puncte der einen Gruppe aus denen der andern durch ***zweimalige*** Projection ableiten.

3. Wenn endlich 2 der ersten 4 Puncte mit zweien entsprechenden der andern zusammenfallen, und die geraden Linien, welche die beiden übrig bleibenden Puncte jeder Gruppe verbinden, sich schneiden: so lassen sich die einen 4 Puncte aus den andern durch ***einmalige*** Projection ableiten.

4. Vier beliebige, durch einen Punct gehende Ebenen, von denen keine 3 dieselbe Kante gemein haben, lassen sich aus beliebigen vier, derselben Bedingung unterworfenen Ebenen durch ***dreimalige*** Projection ableiten [wobei ich den Ausdruck Projection auch auf die reciproke Ableitungsweise übertrage].

5. Wenn dabei ein Paar entsprechender Ebenen zusammenfällt, so lassen sich die einen aus den andern durch ***zweimalige*** Projection ableiten.

6. Wenn dabei zwei Paare entsprechender Ebenen zusammenfallen, und die Durchschnittskanten, in welchen sich die beiden übrig bleibenden Ebenen jeder Gruppe schneiden, in einem Puncte sich begegnen: so lassen sich die einen 4 Ebenen aus den andern durch ***einmalige*** Projection ableiten.

7. In zwei Ebenen, welche projectivisch sein sollen, lassen sich beliebige 4 Puncte der einen, beliebigen 4 Puncten der andern, vorausgesetzt dafs keine 3 Puncte einer Gruppe in gerader Linie liegen, entsprechend setzen. Dann aber ist zu jedem fünften Puncte der einen Ebene der entsprechende der andern bestimmt. Dasselbe gilt, wenn man statt der 4 Puncte in beiden Ebenen 4 Gerade setzt, von welchen keine 3 durch denselben Punct gehen.

8. Durch zwei Puncte, welche die Mittelpuncte von projectivischen räumlichen Strahlenbüscheln werden sollen, lassen sich beliebige 4 durch den einen Punct gehende Ebenen, von denen keine 3 eine und dieselbe Kante gemein haben, beliebigen 4 derselben Bedingung unterworfenen Ebenen, die durch den andern Punct gehen, entsprechend setzen; dann aber ist zu jeder fünften Ebene des einen Büschels die entsprechende des andern bestimmt. Dasselbe gilt, wenn man, statt der 4 Ebenen, durch jeden der beiden Puncte 4 Strahlen setzt, von denen keine 3 in einer und derselben Ebene liegen.

9. Zwei projectivische punctirte Ebenen lassen sich stets durch dreimalige Projection aus einander ableiten. Haben sie insbesondere einen selbstentsprechenden Punct, so lassen sie sich durch zweimalige Projection aus einander ableiten; und wenn in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen 3 selbstentsprechende Puncte liegen, durch einmalige Projection.

10. Umgekehrt: Wenn sich zwei projectivische Ebenen aus einander durch einmalige Projection ableiten lassen, so ist in der Durchschnittslinie beider Ebenen jeder Punct ein selbstentsprechender. Wenn sie sich durch zweimalige Projetion ableiten lassen, so haben sie einen selbstentsprechenden Punct (nämlich den Punct, welchen die beiden Ebenen mit der Projections-Ebene gemein haben).

11. Zwei projectivische Strahlenbüschel lassen sich stets durch dreimalige Projection aus einander ableiten. Haben sie insbesondere eine selbstentsprechende Ebene, so lassen sie sich durch zweimalige Projection aus einander ableiten, und wenn durch die Verbindungslinie der beiden Mittelpuncte 3 selbstentsprechende Ebenen gehen, durch einmalige Projection.

12. Umgekehrt: Wenn sich zwei projectivische Strahlenbüschel aus einander durch einmalige Projection ableiten lassen, so ist jede durch die Verbindungslinie ihrer Mittelpuncte gehende Ebene eine selbstentsprechende. Wenn sie sich durch zweimalige Projection aus einander ableiten lassen, so haben sie eine selbstentsprechende Ebene (nämlich die Ebene, welche durch die beiden Mittelpuncte und den Projectionspunct geht).

Noch ergeben sich leicht die folgenden Sätze, welche zur Veranschaulichung der projectivischen Beziehungen nothwendig sind.

13. In je zwei projectivischen Ebenen (α und α_1) giebt es mindestens *ein* Paar entsprechender Geraden, welche sich schneiden. (Es giebt deren im Allgemeinen mehrere; und zwar bilden in jeder Ebene die Geraden, die von den entsprechenden Geraden getroffen werden, die Tangenten eines Kegelschnitts.)

Bew. Denn es lassen sich beide nach dem Satze (No. 9) durch *dreimalige* Projection aus einander ableiten. Legt man nun durch die 3 Projectionspuncte eine Ebene α_4, welche die Ebenen α und α_1 beziehlich in A und A_1 schneidet, so sind A und A_1 entsprechende Geraden. Denn die fortschreitenden Projectionen der Geraden A_1 bleiben stets in der Ebene α_4; also liegt auch die der Geraden A_1 entsprechende in dieser Ebene, mithin im Durchschnitt von α_4 und α; d. h. ist identisch mit A.

14. Wenn sich zwei projectivische Ebenen (α und α_1) durch *zweimalige* Projection aus einander ableiten lassen, so giebt es eine Gerade von der Art, dafs alle durch sie gelegte Ebenen die beiden Ebenen α und α_1 in entsprechenden Geraden schneiden; und zwar ist jene Gerade die Verbindungslinie der beiden Projectionspuncte.

15. Wenn sich zwei projectivische Ebenen durch *einmalige* Projection aus einander ableiten lassen, so schneiden sich je zwei entsprechende Geraden beider Ebenen; und die Ebenen, welche zwei entsprechende Geraden verbinden, gehen alle durch denselben Punct, nämlich durch den Projectionspunct.

Und eben so reciprok:

16. Je zwei projectivische Strahlenbüschel haben mindestens *ein* Paar entsprechender Strahlen, welche sich schneiden.

17. Wenn sich zwei projectivische Strahlenbüschel durch zweimalige Projection aus einander ableiten lassen, so giebt es eine Gerade, deren sämmtliche Puncte Vereinigungspuncte entsprechender Strahlen sind; und zwar ist diese Gerade die Durchschnittslinie der beiden Projections-Ebenen.

18. Wenn sich zwei projectivische Strahlenbüschel durch einmalige Projection aus einander ableiten lassen, so begegnen sich je zwei entsprechende Strahlen in der Projections-Ebene.

Die aufgestellten Beziehungen werden für die projectivische Deutung der Gleichungen dritten Grades genügen. Da diese Beziehungen, so viel ich weifs, bisher nirgends im Zusammenhange dargestellt sind, so glaubte ich, der Deutlichkeit wegen, sie hier zusammenstellen zu müssen.

§. 5.

Die Oberfläche dritter Ordnung als Durchschnitt dreier projectivischer Büschel.

Nimmt man an, dafs x in der Gleichung dritten Grades stets mit einer Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen multiplicirt sei, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0,$$

wo $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ Reihen abwechselnder fester Puncte und Ebenen sind.

Wir haben gezeigt, dafs jeder Punct x, welcher dieser Gleichung genügt, sich mittels einer durch den Punct a gelegten Hülfs-Ebene φ als Durchschnitt der drei Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ construiren läfst, indem nämlich $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ durch Umkehrung der Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ hervorgehen. Ferner wurde gezeigt, dafs, wie auch die Hülfs-Ebene φ durch den Punct a gelegt werden mag, stets der Durchschnittspunct jener drei Ebenen, oder allgemeiner, jeder den drei Ebenen gemeinsame Punct (1.) genügt. Nun stellt die Gesammtheit der durch den Punct a gehenden Ebenen φ einen Ebenenbüschel zweiter Stufe, und ihre Durchschnittslinien stellen einen räumlichen Strahlenbüschel dar. Aus diesem Ebenenbüschel geht das System der Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$ durch fortschreitende Multiplication mit einer Reihe abwechselnder fester Ebenen und Puncte, also durch fortschreitende Projection hervor. Das hervorgehende Gebilde ist ein Ebenenbüschel zweiter Stufe, aus welchem also (nach dem vorhergehenden Paragraph) der ursprüngliche Ebenenbüschel wiederum durch Projection abgeleitet werden kann. Die Beziehung ist also eine gegenseitige, d. h. beide Büschel sind zu einander projectivisch. Demnach sind die drei Ebenenbüschel $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$ dem Ebenenbüschel φa projectivisch, also auch untereinander und wir haben folgenden Satz:

„Der Durchschnitt dreier projectivischer Ebenenbüschel zweiter Stufe ist eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

Oder, anders ausgedrückt:

„Die gesammten Durchschnittspuncte je dreier entsprechender Ebenen dreier projectivischer Strahlenbüschel bilden eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***"

Sucht man, umgekehrt, wenn drei projectivische Ebenenbüschel zweiter Stufe gegeben sind, die möglichst einfache Gleichung ihres Durchschnitts, so kann man auf den Satz zurückgehen, dafs zwei solche Büschel sich stets durch dreimalige Projection aus einander ableiten lassen. Es seien a, a_1, a_2 die

Mittelpuncte der drei Ebenenbüschel, und φ, φ_1, φ_2 entsprechende Ebenen derselben. Da sich nun aus einem Ebenenbüschel (φ) jeder damit projectivische Büschel (φ_1, φ_2) durch dreimalige Projection, also durch fortschreitende Multiplication mit drei Paaren von Ebenen und Puncten ableiten läfst, so folgt, dafs sich φ_1 und φ_2 in den folgenden Formen ausdrücken lassen:

$$\varphi \equiv \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1, \qquad \varphi_2 \equiv \varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2.$$

Also wenn x der Durchschnitt der drei entsprechenden Ebenen φ, φ_1, φ_2 ist, so ist

$$x \equiv \varphi\varphi_1\varphi_2 \equiv \varphi(\varphi\gamma c\beta b\alpha a_1)(\varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2).$$

Ist x der Durchschnitt der drei Ebenen φ, φ_1, φ_2, oder allgemeiner (auch wenn die drei Ebenen eine Kante gemein haben, oder zusammenfallen), ein Punct, der in allen dreien zugleich liegt, so hat man:

$$0 = \varphi x, \quad 0 = \varphi_1 x = \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1 x, \quad 0 = \varphi_2 x = \varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2 x,$$

oder, umgekehrt:

$$x\varphi = 0, \quad x a_1\alpha b\beta c\gamma\varphi = 0, \quad x a_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1\varphi = 0,$$

also, da die drei Puncte x, $x a_2\alpha b\beta c\gamma$, $x a_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1$ in φ liegen:

$$\varphi \equiv x(x a_1\alpha b\beta c\gamma)(x a_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1).$$

Die Ebene φ geht aber durch a, also hat man

$$0 = \varphi a = x(x a_1\alpha b\beta c\gamma)(x a_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1)a.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, durch welche der Durchschnitt dreier projectivischer Ebenenbüschel dargestellt ist.

Wenn insbesondere zwei der projectivischen Ebenenbüschel durch zweimalige Projection aus einander sich ableiten lassen, d. h. wenn sie eine selbst entsprechende Ebene haben, so reducirt sich nach der so eben gegebenen Entwickelung die Gleichung auf die Form

$$0 = x(x a_1\alpha b\beta)(x a_2\alpha_1 b_1\beta_1 c_1\gamma_1)a.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dafs die Durchschnittslinie der Ebenen α und β auf der durch die Gleichung dargestellten Oberfläche dritter Ordnung liegt. In der That ist x irgend ein Punct dieser Durchschnittslinie; d. h.: liegt x in α und in β, so ist $x a_1\alpha \equiv x$, also $x a_1\alpha b\beta \equiv x b\beta \equiv x$. Mithin geben die beiden ersten Factoren obiger Gleichung denselben Punct x, folglich ist ihr Product gleich Null, also auch das ganze Product. Somit ist x, also jeder Punct von $\alpha\beta$, ein Punct der Oberfläche, d. h. die Gerade $\alpha\beta$

liegt selbst auf der Oberfläche. Die Ebenen α und β sind nun diejenigen Ebenen, mittels deren die beiden ersten Ebenenbüschel (φ und φ_1) aus einander durch Projection abgeleitet werden konnten. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen hat nach dem Satze (Nr. 17. im vorigen Paragraph) die Eigenschaft, dafs in jedem Puncte derselben zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel sich begegnen; weshalb sie die ***Collineations-Axe*** dieser Büschel genannt werden kann.

Haben insbesondere je zwei der drei projectivischen Büschel, welche die Oberfläche erzeugen, eine selbstentsprechende Ebene, so ist klar, dafs die drei Collineations-Axen, die zu je zweien jener Büschel gehören, in der Oberfläche liegen. Fallen endlich diese drei selbstentsprechenden Ebenen zusammen, d. h. fallen in der Ebene δ, welche die drei Mittelpuncte der Büschel verbindet, drei entsprechende Ebenen zusammen, so liegt jeder Punct jener Ebene δ in drei entsprechenden Ebenen, und ist also ein Punct der Durchschnittsfläche; d. h.: die Durchschnittsfläche zerfällt in die Ebene δ und in eine Fläche zweiter Ordnung. In dieser Fläche zweiter Ordnung müssen aber die drei Collineations-Axen liegen, folglich ist die dadurch erzeugte Fläche zweiter Ordnung gleichfalls eine geradlinige. Für die drei Collineations-Axen ergiebt sich leicht, dafs, wenn zwei derselben in einem Punct zusammentreffen, auch die dritte durch diesen Punct gehen mufs. Denn treffen zwei Collineations-Axen, z. B. die zwischen dem ersten und zweiten, und die zwischen dem zweiten und dritten Büschel, in einem Puncte zusammen, so begegnen sich in diesem Puncte drei entsprechende Strahlen jener drei Büschel, also auch zwei entsprechende Strahlen des ersten und dritten Büschels; d. h. die Collineations-Axe zwischen dem ersten und dritten Büschel mufs gleichfalls durch diesen Punct gehen. Hieraus nun folgt dafs die Collineations-Axen entweder durch einen und denselben Punct gehen, oder sich überhaupt nicht treffen. Im ersteren Falle ist die durch sie gelegte Fläche zweiter Ordnnng ein ***Kegel,*** im zweiten ein ***einfaches Hyperboloïd,*** oder, wenn die drei Collineations-Axen mit einer und derselben Ebene parallel sind, ein ***hyperbolisches Paraboloïd.*** In beiden Fällen wird die Fläche zweiter Ordnung durch jene drei Axen bestimmt. Sind $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ die drei Axen, und wird angenommen, sie treffen nicht in demselben Puncte zusammen, so ist die Gleichung des gesammten Durchschnitts der drei Büschel:

$$x\delta . xABCx = 0,$$

und in Worten ausgedrückt:

„Wenn in der Verbindungs-Ebene der Mittelpuncte dreier projectivischer Büschel drei entsprechende Ebenen zusammenfallen, so zerfällt die Durchschnittsfläche der drei Büschel in jene Verbindungs-Ebene und in eine durch die drei Collineations-Axen gehende Fläche zweiter Ordnung."

Wir stellen nun noch die Aufgabe: „Die Oberfläche dritter Ordnung, welche durch drei gegebene Puncte und durch 4 gegebene gerade Linien geht, als Durchschnitt dreier projectivischer Büschel zu construiren."

Die Bedingung, dafs eine Oberfläche durch eine gerade Linie gehen (d. h. diese ganz in jener liegen) soll, ist identisch mit der Bedingung, dafs *vier* in gerader Linie liegende Puncte auf der Oberfläche liegen sollen. Die Bedingung also, dafs sie durch vier gerade Linien gehen soll, drückt aus, dafs sie 16 Puncte enthalten soll, die zu je vieren auf 4 geraden Linien liegen. Diese 16 Puncte, mit den 3 ursprünglich gegebenen, liefern eine Anzahl von 19 Puncten, welche zur Bestimmung einer Oberfläche dritter Ordnung im Allgemeinen ausreichen. Es wird also die Oberfläche durch jene 3 Puncte und 4 Gerade im Allgemeinen bestimmt werden. Es seien a, a_1, a_2 die 3 Puncte, A, B, C, D die 4 Geraden. Durch jene 3 Puncte und diese 4 Gerade lege man die 12 Ebenen, so bilden diese drei Büschel mit den Mittelpuncten a, a_1, a_2, indem jeder Büschel 4 Ebenen enthält. Wir nehmen an, dafs die gegebenen 7 Elemente *nicht* eine solche besondere Lage haben, dafs sich durch irgend einen der drei Puncte eine Gerade ziehen lasse, welche drei der gegebenen Geraden schnitte. Dies angenommen, folgt, dafs von den 4 Ebenen eines jeden Büschels keine 3 sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, weil sonst diese gerade Linie, gegen die Annahme, durch den Mittelpunct dieses Büschels gehen und die 3 Geraden, durch welche die 3 Ebenen gelegt wären, schneiden würde. Man kann daher (nach §. 5, 8) die 3 Büschel zu einander projectivisch setzen; wobei sich die entsprechenden Ebenen beliebig wählen lassen. Wir setzen aA, a_1A, a_2A einander entsprechend; und so überhaupt diejenigen jener 12 Ebenen, welche jedesmal in einer der vier Geraden A, B, C, D zusammentreffen. Die Durchschnittsfläche dieser 3 Ebenenbüschel wird dann durch eine Gleichung von der Form

$$x(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0$$

ausgedrückt, wo die Reihen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ beziehlich mit a_1 und a_2 beginnen. Diese Gleichung läfst sich, da die 4 Factoren Puncte sind, auch

$$xa(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2) = 0$$

schreiben. Es ist zu zeigen, dafs die durch sie dargestellte Durchschnittsfläche die 7 gegebenen Elemente enthält.

Ist zuerst $x \equiv a$, so wird $xa = 0$; ist $x \equiv a_1$ oder a_2, so wird $x\mathfrak{R}_1$ oder $x\mathfrak{R}_2 = 0$, also wird in allen drei Fällen der Gleichung genügt, d. h. die Fläche enthält die Puncte a, a_1, a_2. Ferner, in der Geraden A, da sie in drei entsprechenden Ebenen liegt, ist jeder Punct dreien entsprechenden Ebenen gemein, also ein Punct der Durchschnittsfläche, folglich geht diese auch durch die Gerade A, und eben so durch B, C, D. Mithin ist die Aufgabe vollständig gelöset.

§. 6.

Deutung jeder stereometrischen Gleichung dritten Grades durch Projectivität.

In dem vorhergehenden Paragraph werde nur die Gleichungsform (1.), und von ihr wiederum nur der Fall betrachtet, wo die in der Gleichung vorkommenden Reihen ($\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$) von Factoren aus abwechselnden Puncten und Ebenen bestehen. Es bleiben also noch die Fälle zu berücksichtigen, wo eine oder mehrere der Reihen nur aus Geraden bestehen. In der zweiten Gleichungsform bestehen, wie wir oben sahen, alle drei Reihen aus Geraden. Die Gleichung (1.) war:

$$(1.) \qquad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0.$$

Es wurde gezeigt, dafs sich jeder Punct x, der dieser Gleichung genügt, als Durchschnitt dreier Ebenen ansehen läfst; mittels eines durch a gelegten Ebenenbüschels zweiter Stufe. Wenn nämlich φ eine beliebige Ebene dieses Büschels ist, und $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ die durch Umkehr aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ hervorgehenden Reihen sind, so genügt der Durchschnitt der drei Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$, der obigen Gleichung, und die Gesammtheit dieser Durchschnitte bildet die durch die Gleichung (1.) dargestellte Oberfläche. Die Ebene $\varphi\mathfrak{R}'$ geht nun aus φ durch fortschreitende Projection hervor, und die ganze Schaar der Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$ bildet einen Ebenenbüschel; und zwar entweder einen Ebenenbüschel zweiter Stufe, oder erster Stufe, je nachdem $\mathfrak{R}'$ aus einer Reihe abwechselnder Ebenen und Puncte, oder aus einer Reihe von Geraden besteht. Im ersten Falle ist der letzte Punct jener Reihe $\mathfrak{R}'$ der Mittelpunct des Ebenenbüschels zweiter Stufe; im zweiten Falle ist die letzte Gerade jener Reihe ($\mathfrak{R}'$) die Axe des Ebenenbüschels erster Stufe. In beiden Fällen ist der Ebenenbüschel $\varphi\mathfrak{R}'$ durch Projection aus dem Ebenenbüschel zweiter Stufe (φ) abgeleitet. Im ersten Falle liefs sich rückwärts aus dem letzteren Büschel (φ)

wieder der erste durch Projection ableiten. Im zweiten Falle ist dies nicht möglich, da man durch fortschreitende Projection eines Ebenenbüschels erster Stufe immer nur höchstens zu Gebilden erster Stufe gelangen kann. Die Projectivität ist also in diesem Falle nicht gegenseitig. Dasselbe gilt nun von den Ebenenbüscheln $\varphi\mathfrak{R}_1'$, $\varphi\mathfrak{R}_2'$.

Nach diesen Vorbemerkungen lassen sich die vier aus der Formel (1.) fliefsenden Sätze der Projectivität unmittelbar aussprechen; wobei wir, der Vollständigkeit wegen, auch noch den früher entwickelten Satz hinzufügen:

1. Der Durchschnitt dreier einander projectivischer Ebenenbüschel zweiter Stufe ist eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

2. Der Durchschnitt zweier Ebenenbüschel zweiter Stufe und eines Ebenenbüschels erster Stufe, von denen die ersten beiden untereinander projectivisch sind, der letzte aber aus ihnen durch Projection ableitbar ist, bildet eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

3. Der Durchschnitt eines Ebenenbüschels zweiter Stufe und zweier aus ihm durch Projectivität ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

4. Der Durchschnitt dreier aus einem Ebenenbüschel zweiter Stufe durch Projection ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

Hierzu füge ich sogleich den aus der Formel (2.) ableitbaren Satz, welcher sich aus ihr genau auf die entsprechende Weise ergiebt.

5. Der Durchschnitt dreier aus einer punctirten Ebene durch Projection ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

Endlich lassen sich alle diese Fälle in dem folgenden Satze zusammenfassen.

6. Der Durchschnitt dreier aus einem Gebilde zweiter Stufe durch Projection ableitbarer Ebenenbüschel ist eine ***Oberfläche dritter Ordnung.***

Zu der speciellen Discussion der Sätze Nr. 2 bis 5 würde eine Entwickelung der projectivischen Beziehungen zwischen Gebilden zweiter und erster Stufe, und zwischen Gebilden erster Stufe, die aus demselben Gebilde zweiter Stufe entspringen, nothwendig sein. Diese Beziehungen sind indessen von so eigenthümlicher Art, dafs ihre, auch nur nothdürftige Entwickelung einen bedeutenden Umfang haben würde. Nur beispielsweise will ich hier eine der einfacheren Beziehungen ohne Beweis aufstellen:

„Aus einem beliebigen Verein von fünf verschiedenen Puncten (a, b, c, ∂, e) einer Ebene (α), von denen jedoch keine 4 in gerader Linie liegen, läfst sich ein beliebiger Verein von 5 verschiedenen Puncten $(a_1, b_1, c_1, \partial_1, e_1)$ einer Geraden A_1 durch fortschreitende Projection ableiten; vorausgesetzt jedoch, dafs keine 4 Puncte des letzten Vereins mit den 4 Strahlen projectivisch sind, welche von den 4 entsprechenden Puncten des ersten Vereins nach dem fünften Puncte desselben gezogen werden. Alsdann ist zu jedem sechsten Punct der Ebene der entsprechende Punct der Geraden bestimmt. Wenn hingegen 4 Puncte der Geraden, (z. B. $a_1, b_1, c_1, \partial_1$) mit den 4 Strahlen $(ae, be, ce, \partial e)$ projectivisch sind, welche von den entsprechenden Puncten (a, b, c, ∂) nach dem fünften Punct (e) der Ebene gezogen sind, so hangt die projectivische Beziehung zwischen jener Geraden und dieser Ebene von dem durch 5 Puncte (a, b, c, ∂, e) der Ebene gelegten Kegelschnitt in folgender Weise ab: Ist der von irgend einem sechsten Punct (g) des Kegelschnitts nach den 5 Puncten (a, b, c, ∂, e) gezogene Strahlenbüschel zu der gegebenen Geraden *nicht* projectivisch, so kann dieselbe aus jener Ebene *nicht* durch Projection abgeleitet werden: findet dagegen jene Projectivität Statt, so ist die projectivische Beziehung zwischen der Ebene und der Geraden *nicht* bestimmt, sondern man kann dann zu jedem beliebigen sechsten Punct (f) der Ebene, der jedoch nicht in dem Kegelschnitt liegt, den entsprechenden Punct f_1 der Geraden noch willkürlich annehmen, so dafs noch immer die Gerade aus der Ebene durch fortschreitende Projection erfolgt.

Dieser Satz entspricht dem bekannten Satze, „dafs man in zwei Geraden drei Paare von Puncten beliebig annehmen und dann die Geraden projectivisch setzen kann, so dafs jene Punctenpaare entsprechende Elementenpaare werden." Und schon aus diesem Satze, welcher für die gegenseitige Beziehung *dreier* aus *einem* Gebilde zweiter Stufe ableitbaren Gebilde erster Stufe noch bei weitem zusammengesetzter sich gestaltet, sieht man, dafs zu der weitern Behandlung des hier berührten Gegenstandes ein umfangsreicherer Apparat nöthig ist; weshalb ich diesen Gegenstand für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

Stettin, im Juli 1852.

6.

Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen; nebst einigen Anwendungen auf die Berechnung der Wurzeln von Gleichungen.

(Von Herrn Dr. *Öttinger*, ord. Prof. der Mathematik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.)

§. 1.

Wir wollen folgende zwei Formen von Kettenbrüchen betrachten:

(1.) $$K = q + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \cdot \cdot \cdot}}}$$

(2.) $$K = q + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 \cdot \cdot \cdot}}}$$

Die Gröfsen $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ sollen Elemente heifsen. Die Form (2.) ist die allgemeinere; aus ihr läfst sich (1.) leicht ableiten; die Gröfse q kann jeden beliebigen Werth haben. Sie ist für die Entwicklung ohne Bedeutung, und wird also nicht besonders berücksichtigt.

Der Kürze wegen werden wir den $n$ten Partialbruch wie folgt bezeichnen:

(3.) $$K_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdot \cdot \cdot \cfrac{1}{a_n}}} = K(a_1, a_n) = \frac{Z_n}{N_n},$$

(4.) $$K_n = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdot \cdot \cdot \cfrac{b_n}{a_n}}} = K(b_1 : a_1, b_n : a_n) = \frac{Z_n}{N_n},$$

wo also Z_n der Zähler und N_n der Nenner des $n$ten Partialbruchs ist.

Die Elemente eines Kettenbruches sind *positiv* angenommen. Sie können auch *negativ* angenommen werden, oder jeden beliebigen Zeichen-

wechsel haben. Der Einfluſs ***negativer*** Elemente auf die Bildung eines beliebigen Partialbruches soll näher gezeigt werden.

§. 2.

Der Kettenbruch (1. §. 1.) hat die einfachste Form. Er bildet die Grundlage für weitere Ableitungen. Da die entwickelten Ausdrücke der einzelnen Partialbrüche für das Folgende nöthig sind, so sollen sie hier stehen. Jede der bekannten Methoden kann dazu benutzt werden.

Es ist

$$(1.)\quad \begin{cases} K(a_1) = \dfrac{Z_1}{N_1} = \dfrac{1}{a_1}, \\ K(a_1, a_2) = \dfrac{Z_2}{N_2} = \dfrac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}}, \\ K(a_1, a_2, a_3) = \dfrac{Z_3}{N_3} = \dfrac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} = \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3}}}, \\ K(a_1, a_4) = \dfrac{Z_4}{N_4} = \dfrac{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4}{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1} = \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \dfrac{1}{a_4}}}} \end{cases}$$

u. s. w. Man sieht, dafs sich die Gebilde des Zählers und Nenners eines jeden Partialbruchs dadurch von einander unterscheiden, dafs in denen des ***Zählers*** das erste Element (a_1) ***nicht*** vorkommt. Demnach läfst sich der $n$te Partialbruch im Allgemeinen auf folgende Art zweckmäfsig bezeichnen:

$$(2.)\quad K(a_1, a_n) = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{D(a_2, a_n)}{D(a_1, a_n)};$$

wo $D(a_2, a_n)$ und $D(a_1, a_n)$ Gebilde bedeuten, deren Entwicklungsgesetze näher zu erörtern und festzustellen sind.

Um Dies vorzubereiten, sollen zwei benachbarte Theilbrüche entwickelt dargestellt werden. Wir nehmen dazu den 7ten und 8ten des Kettenbruchs (1. §. 1.). Es ergiebt sich durch Fortsetzung des Schemas (1. §. 2.):

(3.)

$$\left\{\begin{array}{l}
Z_7 = D(a_2, a_7) = a_2a_3a_4a_5a_6a_7 + a_2a_3a_4a_5 + a_2a_3 + 1 \\
\qquad\qquad a_2a_3a_4a_7 \quad a_2a_5 \\
\qquad\qquad a_2a_3a_6a_7 \quad a_2a_7 \\
\qquad\qquad a_2a_5a_6a_7 \quad a_4a_5 \\
\qquad\qquad a_4a_5a_6a_7 \quad a_4a_7 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_6a_7 \\
N_7 = D(a_1, a_7) = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 + a_1a_2a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3 + a_1 \\
\qquad\qquad a_1a_2a_3a_4a_7 \quad a_1a_2a_5 \quad a_3 \\
\qquad\qquad a_1a_2a_3a_6a_7 \quad a_1a_2a_7 \quad a_5 \\
\qquad\qquad a_1a_2a_5a_6a_7 \quad a_1a_4a_5 \quad a_7 \\
\qquad\qquad a_1a_4a_5a_6a_7 \quad a_1a_4a_7 \\
\qquad\qquad a_3a_4a_5a_6a_7 \quad a_1a_6a_7 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_3a_4a_5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_3a_4a_7 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_3a_6a_7 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_5a_6a_7
\end{array}\right.$$

(4.)

$$\left\{\begin{array}{l}
Z_8 = D(a_2, a_8) = a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 + a_2a_3a_4a_5a_6 + a_2a_3a_4 + a_2 \\
\qquad\qquad a_2a_3a_4a_5a_8 \quad a_2a_3a_6 \quad a_4 \\
\qquad\qquad a_2a_3a_4a_7a_8 \quad a_2a_3a_8 \quad a_6 \\
\qquad\qquad a_2a_3a_6a_7a_8 \quad a_2a_5a_6 \quad a_8 \\
\qquad\qquad a_2a_5a_6a_7a_8 \quad a_2a_5a_8 \\
\qquad\qquad a_4a_5a_6a_7a_8 \quad a_2a_7a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_4a_5a_6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_4a_5a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_4a_7a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_6a_7a_8 \\
N_8 = D(a_1, a_8) = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 + a_1a_2a_3a_4a_5a_6 + a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2 + 1 \\
\qquad\qquad a_1a_2a_3a_4a_5a_8 \quad a_1a_2a_3a_6 \quad a_1a_4 \\
\qquad\qquad a_1a_2a_3a_4a_7a_8 \quad a_1a_2a_3a_8 \quad a_1a_6 \\
\qquad\qquad a_1a_2a_3a_6a_7a_8 \quad a_1a_2a_5a_6 \quad a_1a_8 \\
\qquad\qquad a_1a_2a_5a_6a_7a_8 \quad a_1a_2a_5a_8 \quad a_3a_4 \\
\qquad\qquad a_1a_4a_5a_6a_7a_8 \quad a_1a_2a_7a_8 \quad a_3a_6 \\
\qquad\qquad a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \quad a_1a_4a_5a_6 \quad a_3a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_1a_4a_5a_8 \quad a_5a_6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_1a_4a_7a_8 \quad a_5a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_1a_6a_7a_8 \quad a_7a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_3a_4a_5a_6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_3a_4a_5a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_3a_4a_7a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_3a_6a_7a_8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_5a_6a_7a_8
\end{array}\right.$$

Scheidet man in diesen Ausdrücken das *letzte* oder *höchste* Element aus, so zerfallen die Gebilde des Zählers und Nenners in zwei Arten von Gruppen,

in welchen sich die Stellenzahlen der Elemente bis zur vorletzten und bis zur zweitletzten erheben, und die nach der Zerlegung genau wieder dem in (1, 3 und 4) angegebenen Bildungs-Gesetze unterliegen. Es ist allgemein:

$$(5.)\quad K(a_1, a_n) = \frac{D(a_2, a_{n-1})a_n + D(a_2, a_{n-2})}{D(a_1, a_{n-1})a_n + D(a_1, a_{n-2})},$$

oder, da in Rücksicht auf (2.), $D(a_2, a_{n-1}) = Z_{n-1}$, $D(a_2, a_{n-2}) = Z_{n-2}$, $D(a_1, a_{n-1}) = N_{n-1}$ und $D(a_1, a_{n-2}) = N_{n-2}$ ist:

$$(6.)\quad K(a_1, a_n) = \frac{Z_{n-1}a_n + Z_{n-2}}{N_{n-1}a_n + N_{n-2}}.$$

Dieses Gesetz ist *zurücklaufend* und zeigt, wie auf die bekannte Weise der *n*te Partialbruch aus Zähler und Nenner der zwei vorhergehenden Partialbrüche und dem Schlufs-Elemente gebildet wird.

Scheidet man in diesen Gebilden das *Anfangs-Element* aus, so trennen sie sich auf ähnliche Weise und man erhält:

$$(7.)\quad K(a_1, a_n) = \frac{D(a_2, a_n)}{a_1 D(a_2, a_n) + D(a_3, a_n)} = \frac{Z_n}{a_1 Z_n + D(a_3, a_n)}.$$

Behandelt man hier den Zähler wie oben, so wird

$$(8.)\quad K(a_1, a_n) = \frac{a_2 D(a_3, a_n) + D(a_4, a_n)}{a_1 D(a_2, a_n) + D(a_3, a_n)}.$$

Sehr einfach rechtfertigt sich

$$(9.\quad D(0) = 1,$$

$$(10.)\quad K(a_k, a_r) = \frac{D(a_{k+1}, a_r)}{D(a_k, a_r)} = \frac{D(a_{k+1}, a_{r-1})a_r + D(a_{k+1}, a_{r-2})}{D(a_k, a_{r-1})a_r + D(a_k, a_{r-2})}.$$

Die Gleichungen (5. und 6.) lassen sich benutzen, um gröfsere Kettenbrüche durch Sonderung in zwei Theile darzustellen. Es sei

$$(11.)\quad K(a_1, a_n, a_{n+1}, a_r) = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \cdots \frac{1}{a_r}}}$$

$$= \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n + K(a_{n+1}, a_r)}} \qquad = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n + \frac{1}{\frac{D(a_{n+1}, a_r)}{D(a_{n+2}, a^r)}}}}$$

Wird in (5.) $n+1$ statt n gesetzt und dann $a_{n+1} = \frac{D(a_{n+1}, a_r)}{D(a_{n+2}, a_r)}$ eingeführt, so erhält man, nach den nöthigen Reductionen:

$$(12.) \quad K(a_1, a_n, a_{n+1}, a_r) = \frac{D(a_2, a_n)D(a_{n+1}, a_r) + D(a_2, a_{n-1})D(a_{n+2}, a_r)}{D(a_1, a_n)D(a_{n+1}, a_r) + D(a_1, a_{n-1})D(a_{n+2}, a_r)}$$

oder

$$(12\,a.) \quad K(a_1, a_r) = \frac{Z_n N_{r-n} + Z_{n-1} Z_{r-n}}{N_n N_{r-n} + N_{n-1} Z_{r-n}},$$

unter der Bedingung, dafs $r > n$ ist, und Z_{r-n} und N_{r-n} die Werthe des Zählers und Nenners aus den $r-n$ letzten Elementen des Kettenbruchs (für sich als Ganzes betrachtet) bezeichnen, Z_{n-1}, Z_n, N_{n-1} und N_n aber die bekannte Bedeutung haben.

Aus (11. und 12.) ergiebt sich folgendes allgemeine Bildungsgesetz:

$$(13.) \quad D(a_m, a_q) = D(a_m, a_x)D(a_{x+1}, a_q) + D(a_{m+1}, a_{x-1})D(a_{x+2}, a_q),$$

x mufs zwischen m und q eingeschlossen sein. Hieraus ist ferner:

$$(14.) \quad K(a_1, a_r) = \frac{D(a_2, a_x)D(a_{x+1}, a_r) + D(a_2, a_{x-1})D(a_{x+2}, a_r)}{D(a_1, a_z)D(a_{z+1}, a_r) + D(a_1, a_{z-1})D(a_{z+2}, a_r)}.$$

Diese Zerlegungs-Methode läfst sich weiter verfolgen und man erhält:

$$(15.) \quad K(a_m, a_r)$$
$$= [D(a_{m+1}, a_n)D(a_{n+1}, a_x)D(a_{x+1}, a_r) + D(a_{m+1}, a_{n-1})D(a_{n+2}, a_x)D(a_{x+1}, a_r)$$
$$+ D(a_{m+1}, a_n)D(a_{n+1}, a_{x-1})D(a_{x+2}, a_r) + D(a_{m+1}, a_{n-1})D(a_{n+2}, a_{x-1})D(a_{x+2}, a_r)]$$
$$: [D(a_m, a_v)D(a_{v+1}, a_z)D(a_{z+1}, a_r) + D(a_m, a_{v-1})D(a_{v+2}, a_z)D(a_{z+1}, a_r)$$
$$+ D(a_m, a_v)D(a_{v+1}, a_{z-1})D(a_{z+2}, a_r) + D(a_m, a_{v-1})D(a_{v+2}, a_{z-1})D(a_{z+2}, a_r)].$$

Die Ausdrücke (11. und 12.) lassen sich besonders gut zur Ableitung der Werthe später Partialbrüche in periodischen Kettenbrüchen benutzen, wie sie bei der Darstellung der Wurzelgröfsen vorkommen. Es ist z. B.

$$\sqrt{21} = 4 + K(1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2 \ldots).$$

Die Periode ist 1, 1, 2, 1, 1, 8. Die Werthe des 5ten und 6ten Partialbruchs sind nach (§. 2.):

$$\frac{Z_5}{N_5} = \frac{7}{12}, \qquad \frac{Z_6}{N_6} = \frac{60}{103};$$

die nämlichen Werthe haben die Partialbrüche zwischen dem 6ten und 11ten, 6ten und 12ten, 12ten und 17ten, 12ten und 18ten etc. Z_{11-6}, Z_{12-6}, ..., wenn sie als getrennt betrachtet werden. Man findet aus (12.):

$$\frac{Z_{11}}{N_{11}} = \frac{Z_6 . N_{11-6} + Z_5 . Z_{11-6}}{N_6 . N_{11-6} + N_5 Z_{11-6}} = \frac{60.12+7.7}{103.12+12.7} = \frac{769}{1320},$$

$$\frac{Z_{12}}{N_{12}} = \frac{Z_6 . N_{12-6} + Z_5 . Z_{12-6}}{N_6 . N_{12-6} + N_5 Z_{12-6}} = \frac{60.103+7.60}{103.103+12.60} = \frac{6600}{11329},$$

$$\frac{Z_{17}}{N_{17}} = \frac{Z_{12} . N_{17-12} + Z_{11} . Z_{17-12}}{N_{12} . N_{17-12} + N_{11} Z_{17-12}} = \frac{6600.12+769.7}{11329.103+1320.7} = \frac{84583}{145188},$$

$$\frac{Z_{18}}{N_{18}} = \frac{Z_{12} . N_{18-12} + Z_{11} . Z_{18-12}}{N_{12} . N_{18-12} + N_{11} Z_{18-12}} = \frac{6600.103+769.60}{11329.103+1320.60} = \frac{725940}{1246087},$$

u. s. f. Dies giebt aus (12.) für den 6ten, 12ten und 18ten Partialbruch:

$$\sqrt{21} = 4\frac{60}{103} = 4{,}5825\ldots.,$$

$$\sqrt{21} = 4\frac{6600}{21329} = 4{,}58257569\ldots.,$$

$$\sqrt{21} = 4\frac{725940}{1246087} = 4{,}58257569495\ldots.;$$

der 18te Partialbruch giebt den Werth von $\sqrt{21}$ bis auf 11 Decimalstellen.

§. 3.

Es kommt jetzt darauf an, eine *unabhängige* Bildungs-Art des Zählers und Nenners des *n*ten Partialbruches zu finden. Es wurden zwar schon dahin gehörige Bildungs-Arten aufgestellt, aber sie sind sehr zusammengesetzt und verwickelt, also nicht von practischem Werth. Folgt man den in (1, 3 u. 4, §. 2.) angezeigten entwickelten Ausdrücken, so geben dieselben eine sehr einfache Methode an die Hand, die Gebilde der D *unabhängig* darzustellen; denn es sind nichts anderes als Combinationen nöthig, die mit unbedeutenden Abänderungen den nämlichen Ableitungsgesetzen folgen, wie die *Verbindungen ohne Wiederholungen.*

Geht man nämlich die Gebilde im Zähler und Nenner eines Partialbruchs durch, so zeigt sich, dafs sie Gruppen von verschiedenen Dimensionen enthalten, und zwar so, dafs diese Dimensionen immer um zwei Einheiten abnehmen. Die höchste Dimension oder Classe im *Zähler* ist um eine Einheit kleiner als die Ordnungszahl des Partialbruchs; die höchste Dimension im *Nenner* fällt mit dieser Zahl zusammen. Bezeichnet man die Dimensionen oder Classen durch Exponenten, so ergiebt sich der Ausdruck

$$(1.) \qquad K(a_1, a_2, \ldots a_n) = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{D(a_2, a_n)}{D(a_1, a_n)} = \frac{D^{n-1} + D^{n-3} + D^{n-5} + D^{n-7} + \cdots}{D^n + D^{n-2} + D^{n-4} + D^{n-6} + \cdots}.$$

Die D im Zähler enthalten die Elemente $a_2, a_3, \ldots a_n$; die D im Nenner die Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$. In diesen Gebilden scheiden sich die Partialbrüche in *gerade* und *ungerade.* Die *ungeraden* haben folgende Form:

(2.) $$K(a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}) = \frac{D(a_2, a_{2n-1})}{D(a_1, a_{2n})} = \frac{D^{2n-2} + D^{2n-4} + \ldots D^4 + D^2 + D^0}{D^{2n-1} D^{2n-3} + \ldots D^5 + D^3 + D^1}$$

die *geraden* folgende:

(3.) $$K(a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = \frac{D(a_2, a_{2n})}{D(a_1, a_{2n})} = \frac{D^{2n-1} + D^{2n-3} + \ldots D^5 + D^3 + D^1}{D^{2n} + D^{2n-2} + \ldots D^4 + D^2 + D^0}.$$

Die allgemeinen Symbole für diese Gebilde im ***Zähler*** und ***Nenner*** sind:

(4.) $D(a_2, a_3, \ldots . a_n)^x$ und $D(a_1, a_2, \ldots . a_n)^x$.

Ferner ist in Rücksicht auf (9. §. 2.):

(5.) $D(a_1, a_n)^0 = 1$ und $D(a_2, a_n)^0 = 1$.

Verfolgt man die Stellenzahlen der einzelnen Elemente in den verschiedenen durch D angedeuteten Gruppen der Nenner in (1, 3 und 4, §. 2.), so zeigt sich:

(6.) Dafs die Elemente in den ersten verticalen Reihen *sämmtlich ungerade,* die der zweiten verticalen Reihen *sämmtlich gerade,* die der dritten *sämmtlich ungerade* Stellenzahlen haben u. s. w. Verfolgt man die Stellenzahlen der Elemente in den ***Zählern,*** so zeigt sich das Umgekehrte, und es haben:

(7.) Die Elemente in den ersten verticalen Reihen *lauter gerade,* in den zweiten *lauter ungerade* Stellenzahlen u. s. w., weil das Element a_1 darin nicht vorkommt.

Die *unabhängige **Bildungs-Art*** der durch $D(a_1, a_2, \ldots a_n)^x$ ausgedrückten Gruppen fällt nun genau mit der Methode zusammen, wie die ***Verbindungen ohne Wiederholungen*** aus den entsprechenden Elementen zu derselben Classe gebildet werden. Dies soll an folgendem Falle gezeigt werden. Es ist bekanntlich

(8.) $$C(a_1, a_2, \ldots a_6)^4 = \begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_5 \\ a_1 a_2 a_3 a_6 \\ a_1 a_2 a_4 a_5 \\ a_1 a_2 a_4 a_6 \\ a_1 a_2 a_5 a_6 \\ a_1 a_3 a_4 a_5 \\ a_1 a_3 a_4 a_6 \\ a_1 a_3 a_5 a_6 \\ a_1 a_4 a_5 a_6 \\ a_2 a_3 a_4 a_5 \\ a_2 a_3 a_4 a_6 \\ a_2 a_3 a_5 a_6 \\ a_2 a_4 a_5 a_6 \\ a_3 a_4 a_5 a_6 \end{array}$$

Diese Gruppen werden dadurch gebildet, dafs man zuerst die niedrigste Gruppe $a_1 a_2 a_3 a_4$ schreibt und dann die Stellenzahl des letzten Elements so lange um die *Einheit* erhöht, bis sie die Höhe des letzten Elements erreicht hat. Während dieses Erhöhens bleiben die vorhergehenden Elemente unverändert. Hierauf wird die Stellenzahl des zweitletzten Elements (a_3) und zugleich die des letzten (was in der Natur der Verbindungen liegt) um die Einheit erhöht, wodurch die Gruppe ($a_1 a_2 a_4 a_5$) entsteht. Dann wird die Stellenzahl des letzten Elements so lange als möglich um die *Einheit* erhöht. Ist Dieses geendet, so wird wieder die Stellenzahl des zweitletzten Elements mit der des nachfolgenden um eine Einheit erhöht, und dann das allmälige Erhöhen der Stellenzahl des letzten Elements so lange als möglich fortgesetzt. Dies Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis kein Erhöhen der Stellenzahl des zweitletzten Elements mehr möglich ist. Hierauf geschieht das Erhöhen der Stellenzahl des *drittletzten* Elements, mit gleichzeitigem Erhöhen der zwei letzten Elemente, und allmälig an den zwei letzten Elementen Alles wie vorhin. Ist Dies geschehen, so wird das drittletzte Element um eine weitere Einheit erhöht und wieder eben so verfahren. Alles Dies wird so lange fortgesetzt, bis die Stellenzahlen der drei letzten Elemente ihre höchsten Werthe erreicht haben. Dann wird allmälig die Stellenzahl des *viertletzten* Elements erhöht, und nach jedem Erhöhen wird mit den drei letzten Elementen auf gleiche Weise verfahren. Dies Verfahren gilt, wie leicht zu sehen, wie von der obigen Elementenzahl, so von jeder andern.

Mit diesem Bildungsgesetz ist nun dasjenige, welches den Gruppen der D zum Grunde liegt, gegeben, wenn man nur bemerkt, dafs das allmälige Erhöhen der Stellenzahlen der Elemente in *verticaler Richtung* (um die nachfolgende Gruppe aus der nächst vorhergehenden abzuleiten) nicht durch die Einheit sondern durch *zwei Einheiten* wegen der Bemerkung in (6. und 7.) geschieht. Sonst bleibt das angegebene Verfahren ganz dasselbe, und das gleichzeitige Erhöhen der nachfolgenden Elemente in *horizontaler Richtung* um eine Einheit ist nicht zu übersehen.

So entspricht der Darstellung (8.) folgender Fall:

$$(9.)\quad D(a_1, a_2, a_3, \ldots . a_8)^4 = \begin{array}{l} a_1a_2a_3a_4 \\ a_1a_2a_3a_6 \\ a_1a_2a_3a_8 \\ a_1a_2a_5a_6 \\ a_1a_2a_5a_8 \\ a_1a_2a_7a_8 \\ a_1a_4a_5a_6 \\ a_1a_4a_5a_8 \\ a_1a_4a_7a_8 \\ a_1a_6a_7a_8 \\ a_3a_4a_5a_6 \\ a_3a_4a_5a_8 \\ a_3a_4a_7a_8 \\ a_3a_6a_7a_8 \\ a_5a_6a_7a_8 \end{array}$$

Dieser Ausdruck fällt mit den Gruppen des dritten Aggregats im Nenner des 8ten Partialbruchs von $K(a_1, a_8)$ (4. §. 2.) zusammen. Auf die angegebene Weise lassen sich leicht die Gebilde des Zählers und Nenners jedes Partialbruches darstellen; wobei noch die in (6. und 7.) gemachten Bemerkungen zu Hülfe kommen. Es ist z. B.

$$(10.)\quad D(a_2, a_3, \ldots . a_9)^6 = \begin{array}{l} a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \\ a_2a_3a_4a_5a_6a_9 \\ a_2a_3a_4a_5a_8a_9 \\ a_2a_3a_4a_7a_8a_9 \\ a_2a_3a_6a_7a_8a_9 \\ a_2a_5a_6a_7a_8a_9 \\ a_4a_5a_6a_7a_8a_9 \end{array}$$

Die Bildungs-Art gilt nun zwar vorerst nur für eine bestimmte Ordnung der Elemente, nämlich für folgende: $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$. Man kann sie aber leicht dieser Beschränkung entheben und den Elementen einer bestimmten Ordnung die jeder andern Ordnung substituiren, wenn man von dem Erhöhen der Stellenzahlen um *zwei Einheiten* absieht und statt dessen *von einem Elemente auf das zweitnachfolgende in der Grundreihe oder Elementenreihe* übergeht. Die Wirkung dieser veränderten Ordnung wird sich an folgendem Falle zeigen:

$$(11.)\quad D(a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_7, a_9, a_8)^6 = \begin{array}{l} a_6a_5a_4a_3a_2a_7 \\ a_6a_5a_4a_3a_2a_8 \\ a_6a_5a_4a_3a_9a_8 \\ a_6a_5a_4a_7a_9a_8 \\ a_6a_5a_2a_7a_9a_8 \\ a_6a_3a_2a_7a_9a_8 \\ a_4a_3a_2a_7a_9a_8 \end{array}$$

Die Ausdrücke (8. und 9.) haben nur eine Gruppe; die erste haben sie gemeinschaftlich, und können daher nicht gleich sein; woraus folgt, dafs eine veränderte ***Ordnung*** in den Elementen eine ***Werthveränderung*** bedingt. Bei den Verbindungen *ohne* Wiederholungen ist Dies nicht der Fall, und es ist

$$C(a_1, a_2, \ldots a_n)^r = C(a_2, a_1, a_3, \ldots a_n)^r = C(a_3, a_2, a_1, a_4, \ldots a_n)^r \ldots.$$

Davon ist jedoch der Fall ausgenommen, wenn bei den D die Ordnung der Elemente sich umkehrt. Man hat dann:

$$(12.) \qquad D(a_r, a_{r+1}, \ldots. a_n)^x = D(a_n, a_{n-1}, \ldots a_{r+1}, a_r)^x.$$

§. 4.

Es ist nun die ***Anzahl*** der Gruppen anzugeben, welche den im vorigen Paragraph betrachteten Combinationen zugehören. Sie lassen sich ganz einfach mit den Verbindungen ohne Wiederholungen vergleichen und dadurch auf schon bekannte Gesetze zurückbringen. Zu dem Ende betrachte man die im Nenner des 7ten Partialbruchs (3. §. 2.) entwickelten Gebilde. Es ist

$$D[a_1, a_2, \ldots. a_7]^7 = C[a_1, a_2, \ldots. a_7]^7 = \frac{7^{7|-1}}{1^{7|1}} = 1,$$

$$D[a_1, a_2, \ldots. a_7]^5 = a_1a_2a_3a_4a_5 = a_1a_2a_3a_4a_5 = C[a_1, a_6]^5 = \frac{6^{5|-1}}{1^{5|1}} = (6)_1$$

1	2	3	4	7		1	2	3	4	6
1	2	3	6	7		1	2	3	5	6
1	2	5	6	7		1	2	4	5	6
1	4	5	6	7		1	3	4	5	6
3	4	5	6	7		2	3	4	5	6

$$D[a_1, a_2, \ldots. a_7]^3 = a_1a_2a_3 = a_1a_2a_3 = C[a_1, a_5]^3 = (5)_3 = (5)_2$$

1	2	5		1	2	4
1	2	7		1	2	5
1	4	5		1	3	4
1	4	7		1	3	5
1	6	7		1	4	5
3	4	5		2	3	4
3	4	7		2	3	5
3	6	7		2	4	5
5	6	7		3	4	5

$$D[a_1, a_2, \ldots. a_7]^1 = a_1 = a_1 = C[a_1, a_4]^1 = (4)_1 = (4)_3.$$

a_3	a_2
a_5	a_3
a_7	a_4

Die Gebilde im Nenner des 8ten Partialbruches (4. §. 2.) geben Folgendes:

$$D[a_1,\ a_8]^8 = C[a_1, a_2, \ldots . a_8]^8 = (8)_8 = (8)_0,$$
$$D[a_1, a_2, \ldots . a_8]^6 = C[a_1, a_2, \ldots . a_7]^6 = (7)_6 = (7)_1,$$
$$D[a_1, a_2, \ldots . a_8]^4 = C[a_1, a_2, \ldots . a_6]^4 = (6)_4 = (6)_2,$$
$$D[a_1, a_2, \ldots . a_8]^2 = C[a_1, a_2, \ldots . a_5]^2 = (5)_2 = (5)_3,$$
$$D[a_1, a_2, \ldots . a_8]^0 = C[a_1, a_2, \ldots . a_4]^0 = (4)_0 = (4)_4.$$

In den Symbolen der C nimmt der Classen-Exponent und zugleich die Zahl der Elemente, aus welchen die Gruppen der Verbindungen ohne Wiederholungen gebildet werden sollen, ab: ersterer um zwei Einheiten, letztere um eine. Die Zahl der Elemente, oder die Stellenzahl des höchsten Elements, nimmt daher um die Hälfte des Unterschiedes aus der Elementen-Anzahl und dem Classen-Exponenten ab. Dies läfst sich bei n Elementen auf folgende Weise ausdrücken:

$$a_{n-\frac{1}{2}(n-r)} = a_{\frac{1}{2}(n+r)}.$$

Danach ist

$$(1.)\qquad D[a_1, a_2, \ldots . a_n]^r = C[a_1, a_2, \ldots . a_{\frac{1}{2}(n+r)}] = \tfrac{1}{2}(n+r)_r,$$

und hier ist im Allgemeinen:

$$(2.)\qquad (q)_r = \frac{q(q-1)(q-2)\ldots .(q-r+1)}{1.2.3\ldots .r}.$$

Nun folgt leicht aus (1, 3 u. 4. §. 2.), dafs r und n Zahlen derselben *Art*, also gleichzeitig *gerade* oder *ungerade* sind. Es ist daher $\frac{1}{2}(n+r)$ immer eine *ganze* Zahl; wie es sein mufs. Für die *Nenner* ergeben sich folgende zwei Formen, und zwar für einen Nenner von *ungerader* Ordnung

$$(3.)\quad D[a_1, a_2, \ldots . a_{2n-1}]^{2r-1} = (n+r-1)_{2r-1} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots .(n-r+1)}{1.2.3\ldots .(2r-1)};$$

r kann hier die Werthe $n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots .\ 3,\ 2,\ 1$ durchlaufen. Für einen Nenner von *gerader* Ordnung ergiebt sich:

$$(4.)\qquad D[a_1, a_2, \ldots . a_{2n}]^{2r} = (n+r)_{2r} = \frac{(n+r)(n+r-1)\ldots .(n-r+1)}{1.2.3\ldots .2r},$$

und r kann die Werthe $n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots .\ 2,\ 1,\ 0$ durchlaufen. Für die *Zähler* giebt es folgende Hauptform:

$$(5.)\qquad D[a_2, a_3, \ldots . a_n]^r = C[a_1, a_2, \ldots . a_{\frac{1}{2}(n+r-1)}] = \tfrac{1}{2}(n+r-1)_r,$$

welche für Zähler von *ungerader* und *gerader* Ordnung in folgende zwei zerfällt:

$$(6.)\quad \boldsymbol{D}[a_2, a_3, \ldots a_{2n-1}]^{2r-2} = (n+r-2)_{2r-2} = \frac{(n+r-2)(n+r-3)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(2r-2)},$$

$$(7.)\quad \boldsymbol{D}[a_2, a_3, \ldots a_{2n}]^{2r-1} = (n+r-1)_{2r-1} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(2r-1)}.$$

In (6. und 7.) kann r die Werthe $n, n-1, n-2, \ldots 3, 2, 1$ durchlaufen.

Die Gruppenzahlen, welche aus diesen Formen hervorgehen, geben, wenn man von einer ***geraden*** oder ***ungeraden*** Zahl absieht, folgende. Für den ***Zähler*** des $n$ten Partialbruchs der Reihe nach:

$$(8.)\quad 1, \frac{(n-2)}{1}, \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}, \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}, \ldots,$$

für den ***Nenner*** desselben Bruchs der Reihe nach:

$$(9.)\quad 1, \frac{n-1}{1}, \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}, \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}, \ldots.$$

Daraus folgen nachstehende Sätze.

(10.) Die Gruppenzahlen und Dimensionen der Gebilde im ***Nenner*** des $(n-1)$ten Partialbruchs sind dieselben, wie die im ***Zähler*** des $n$ten Partialbruchs.

(11.) Die Gebilde der $\boldsymbol{D}$ im Zähler des $n$ten Partialbruchs unterscheiden sich von denen im Nenner des $(n-1)$ten dadurch, dafs die Stellenzahlen der correspondirenden Elemente sämmtlich um eine Einheit höher sind, als die in letzterem; und umgekehrt.

Die bisherigen Resultate führen auf sehr einfache Ausdrücke, wenn die Kettenbrüche ***Perioden*** von ***einem*** oder von ***zwei Elementen*** haben. In beiden Fällen gehen die Gebilde der $\boldsymbol{D}$ in ***Potenzen*** über. Der $n$te Partialbruch des Kettenbruchs

$$\boldsymbol{K}(a, a, a\ldots.) = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}}$$

ist

$$(12.)\quad \boldsymbol{K}(a, a, a, \ldots.) = \frac{a^{n-1}+(n-2)a^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^{n-5}+\ldots.}{a^n+(n-1)a^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-4}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^{n-6}+\ldots.}.$$

Für $a=1$ ist

$$(13.)\quad \boldsymbol{K}_n(1, 1, 1, \ldots.) = \frac{1+(n-2)+(n-3)_2+(n-4)_3+\ldots.}{1+(n-1)+(n-2)_2+(n-3)_3+\ldots.}.$$

Ist der $n$te Partialbruch des Kettenbruchs

$$K(a, b, a, b, \ldots.) = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}\ldots}}}$$

darzustellen, so fallen in der allgemeinen Form die Elemente mit *ungeraden* Stellenzahlen mit a, die mit *geraden* Stellenzahlen mit b zusammen. Da nun die Elemente in den Gebilden der D sich mit bestimmtem Wechsel folgen, so ergeben sich für den $(2n-1)$ten und den $(2n)$ten Partialbruch folgende Ausdrücke:

$$(14.) \quad K_{2n-1}(a, b, a, b, \ldots.)$$

$$= \frac{Z_{2n-1}}{N_{2n-1}} = \frac{a^{n-1}b^{n-1} + (2n-3)\,a^{n-2}b^{n-2} + (2n-4)_2\,a^{n-3}b^{n-3} + \ldots.}{a^n b^{n-1} + (2n-2)\,a^{n-1}b^{n-2} + (2n-3)_2\,a^{n-2}b^{n-3} + \ldots.},$$

$$(15.) \quad K_{2n}(a, b, a, b, \ldots.)$$

$$= \frac{Z_{2n}}{N_{2n}} = \frac{a^{n-1}b^{n} + (2n-2)\,a^{n-2}b^{n-1} + (2n-3)_2\,a^{n-3}b^{n-2} + \ldots.}{a^n b^{n} + (2n-1)\,a^{n-1}b^{n-1} + (2n-2)_2\,a^{n-2}b^{n-2} + \ldots.}.$$

Die Brauchbarkeit dieser Formeln erhellet leicht. Es ist z. B.

$$\sqrt{17} = 4 + K(8, 8, 8, \ldots.)$$

und aus (12.)

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{8^{n-1} + (n-2)8^{n-3} + (n-3)_2\,8^{n-5} + \ldots.}{8^n + (n-1)8^{n-2} + (n-2)_2\,8^{n-4} + \ldots.}.$$

Für $n = 4$ erhält man

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{8^3 + 2.8}{8^4 + 3.8^2 + 1} = \frac{528}{5289} = 4{,}1231056\ldots.$$

was bis auf die 7te Decimalstelle richtig ist. Für

$$\sqrt{18} = 4 + K(4, 8, 4, 8, \ldots.)$$

erhält man aus (14.), wenn $n = 3$ gesetzt wird:

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{4^2.8^2 + 3.4.8 + 1}{4^3.8^2 + 4.4^2.8 + 3.4} = 4 + \frac{1121}{4620} = 4{,}2426406\ldots.$$

Dies ist bis auf die 7te Decimalstelle richtig. Zugleich ergiebt sich aus den vorstehenden Gleichungen Folgendes:

(16.) Der *Nenner* des $(2n)$ten Partialbruchs von $K(a, b, a, b, \ldots.)$ ist gleich dem *Zähler* des $(2n+1)$ten Partialbruchs.

Auf Kettenbrüche, in welchen ein Element (a) $n$mal, ein anderes (b) $r$mal hintereinander vorkommt, lassen sich die Gleichungen (12. §. 2. u. 12. §. 4.) anwenden. Man erhält:

$$(17.) \quad K(a, a, \ldots, b, b, \ldots) = \frac{Z_{n+r}}{N_{n+r}}$$

$$= [(a^{n-1} + (n-2)a^{n-3} + (n-3)_2 a^{n-5} + \ldots)(b^r + (r-1)b^{r-2} + (r-2)_2 b^{r-4} + \ldots)$$
$$+ a^{n-2} + (n-3)a^{n-4} + (n-4)_2 a^{n-6} + \ldots)(b^{r-1} + (r-2)b^{r-3} + (r-3)_2 b^{r-5} + \ldots)]$$
$$: [(a^n + (n-1)a^{n-2} + (n-2)_2 a^{n-4} + \ldots)(b^r + (r-1)b^{r-2} + (r-2)_2 b^{r-4} + \ldots)$$
$$+ (a^{n-1} + (n-2)a^{n-3} + (n-3)_2 a^{n-5} + \ldots)(b^{r-1} + (r-2)b^{r-3} + (r-3)b^{r-5} + \ldots)].$$

§. 5.

Ein Kettenbruch, welcher die nämlichen Elemente wie ein anderer, aber in *umgekehrter Ordnung* hat, soll *symmetrisch zum ersten* heifsen. Beide Brüche *gehören zusammen* und haben die Form $K(a_1, a_2, \ldots a_n)$ und $K(a_n, a_{n-1}, \ldots a_3, a_2, a_1)$. Jeder ist der *symmetrische Kettenbruch* des andern.

Nach (§. 2.) ist

$$(1.) \quad K(a_1, a_2, a_n) = \frac{D(a_2, a_n)}{D(a_1, a_n)},$$

$$(2.) \quad K(a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1) = \frac{D(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1)}{D(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1)}.$$

Wendet man hierauf (12. §. 3.) an, so erhält man aus (2.):

$$(3.) \quad K(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1) = \frac{D(a_1, a_{n-1})}{D(a_1, a_n)}.$$

Aus (1. und 3.) ergiebt sich Folgendes.

(4.) Die *Werthe* zweier *symmetrischer* Kettenbrüche sind einander *nicht gleich.*

(5.) Die *Nenner* zweier *symmetrischer* Kettenbrüche sind *einander gleich*, denn es ist $D(a_1, a_n) = D(a_n, a_1)$.

Von dem *symmetrischen* Kettenbruche gelten die Sätze, welche in (§. 2. und 3.) entwickelt wurden; wie leicht zu sehen.

Bildet man der Reihe nach die Partialbrüche, welche aus zwei zusammengehörigen *symmetrischen* Kettenbrüchen entstehen, indem man allmälig die Elementenzahl um je eines verringert, so erhält man:

$$(6.) \quad K(a_1, a_n) K(a_2, a_n) K(a_3, a_n) \ldots K(a_{n-1}, a_n) K(a_n)$$
$$= \frac{D(a_2, a_n)}{D(a_1, a_n)} \cdot \frac{D(a_3, a_n)}{D(a_2, a_n)} \cdot \frac{D(a_4, a_n)}{D(a_3, a_n)} \ldots \frac{D(a_n)}{D(a_{n-1}, a_n)} \cdot \frac{D(0)}{D(a_n)} = \frac{1}{D(a_1, a_n)},$$

$$(7.)\quad K(a_n, a_1)K(a_{n-1}, a_1)\ \ldots\ K(a_3, a_1)K(a_2, a_1)K(a_1)$$
$$\frac{D(a_{n-1}, a_1)}{D(a_n, a_1)}\cdot\frac{D(a_{n-2}, a_1)}{D(a_{n-1}, a_1)}\cdot\frac{D(a_{n-3}, a_1)}{D(a_{n-2}, a_1)}\ \ldots\ \frac{D(a_1)}{D(a_2, a_1)}\cdot\frac{D(0)}{D(a_1)} = \frac{1}{D(a_n, a_1)}.$$

Aus (6. und 7.) ergiebt sich nach (5.):

$$(8.)\quad K(a_1, a_n)K(a_2, a_n)K(a_3, a_n)\ \ldots\ K(a_n)$$
$$= K(a_n, a_1)K(a_{n-1}, a_1)K(a_{n-2}, a_1)\ \ldots\ K(a_2, a_1).K(a_1).$$

Die Gleichung (11. §. 2.) läfst sich nun zu weitern Ableitungen benutzen. Durch die Multiplication erhält man:

$$K(a_1, a_r)D(a_1, a_n)D(a_{n+1}, a_r) + K(a_1, a_r)D(a_1, a_{n-1})D(a_{n+2}\ a_r)$$
$$- D(a_2, a_n)D(a_{n+1}, a_r) = D(a_2, a_{n-1})D(a_{n+2}, a_r).$$

Dividirt man durch $D(a_1, a_n)D(a_{n+1}, a_r)$, so ergiebt sich:

$$K(a_1, a_r)\left[1 + \frac{D(a_1, a_{n-1})}{D(a_1, a_n)}\cdot\frac{D(a_{n+2}, a_r)}{D(a_{n+1}, a_r)}\right] - \frac{D(a_2, a_n)}{D(a_1, a_n)} = \frac{D(a_2, a_{n-1})D(a_{n-1}, a_r)}{D(a_1, a_n)D(a_{n+1}, a_r)}.$$

Wird rechts mit $D(a_1, a_{n-1})$ multiplicirt und dividirt, und werden dann alle Functionen der D nach (1. u. 2.) auf Kettenbrüche zurückgeführt, so erhält man:

$$K(a_1, a_r)[1 + K(a_n, a_1).K(a_{n+1}, a_r)] - K(a_1, a_n)$$
$$= K(a_1, a_{n-1}).K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r).$$

Wird auf beiden Seiten $K(a_1, a_n)K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r)$ abgezogen, so ist

$$K(a_1, a_r)[1 + K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r)] - K(a_1, a_n)[1 + K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r)]$$
$$= -K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r)[K(a_1, a_n) - K(a_1, a_{n-1})],$$

und hieraus

$$(9.)\quad K(a_1, a_r) - K(a_1, a_n)$$
$$= -\frac{K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r)}{1 + K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r)}[K(a, a_n) - K(a_1, a_{n-1})].$$

Hier ist $r > n$. Diese Gleichung enthält ein sehr allgemeines und beachtenswerthes Gesetz für den ***Zusammenhang*** zweier beliebigen Kettenbrüche und entscheidet über die ***Convergenz*** derselben.

Für den *symmetrischen* Kettenbruch läfst sich auf ähnliche Weise das Gesetz

$$(10.)\quad K(a_1, a_r) - K(a_1, a_n)$$
$$= -\frac{K(a_1, a_n)K(a_{n+1}, a_r)}{1 + K(a_n, a_1)K(a_{n+1}, a_r)}[K(a_n, a_1) - K(a_n, a_2)]$$

ableiten.

Aus (9. und 10.) ist ferner:

$$(11.)\quad K(a_n, a_1)[K(a_1, a_n - K(a_n, a_{n-1})] = K(a_1, a_n)[K(a_n, a_1) - K(a_n, a_2)].$$

Wendet man die Gleichung (1.) auf zwei Nachbarbrüche an, und setzt zu dem Ende $r = n+1$, so ist

$$(12.) \quad K(a_1, a_{n+1}) - K(a_1, a_n) = -\frac{K(a_n, a_1).K(a_{n+1})}{1+K(a_n, a_1)K.(a_{n+1})}[K(a_1, a_n) - K(a_1, a_{n-1})],$$

und man erhält

$$\frac{K(a_n, a_1).K(a_{n+1})}{1+K(a_n, a_1).K(a_{n+1})} = \frac{K(a_n, a_1).\frac{1}{a_{n+1}}}{1+K(a_n, a_1).\frac{1}{a_{n+1}}} = K(a_n, a_1)\frac{1}{a_{n+1}+K(a_n.a_1)}$$

$$= K(a_n, a_1).K(a_{n+1}, a_1).$$

Bezeichnet man den Unterschied zweier Nachbarbrüche durch das bekannte Zeichen, nämlich durch

$$K(a_p, a_{x+1}) - K(a_p, a_x) = \Delta K(a_p, a_x),$$

so erhält man aus (12.):

$$(13.) \quad \Delta K(a_1, a_n) = -K(a_{n+1}, a_1)K(a_n, a_1)\Delta K(a_1, a_{n-1}).$$

Diese Gleichung drückt eine ***zurücklaufende*** Bildungs-Art aus. Um eine ***unabhängige*** Bildungs-Art abzuleiten, beginne man mit den Differenzen der ersten Partialbrüche. Es ist

$$(14.) \quad \begin{cases} \Delta K(a_1, a_2) = -K(a_3, a_1)K(a_2, a_1)\Delta K(a_1), \\ \Delta K(a_1, a_2, a_3) = -K(a_4, a_1)K(a_3, a_1)\Delta K(a_1, a_2), \\ \Delta K(a_1, a_n) = -K(a_5, a_1)K(a_4, a_1)\Delta K(a_1, a_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Hier ist vor Allem $\Delta K(a_1)$ zu suchen. Es ist:

$$\Delta K(a_1) = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} - \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{a_1 a_2 + 1}.\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{D(a_1, a_2)D(a_1)}.$$

Wird diese Form auf Kettenbrüche zurückgebracht und zu dem Ende mit $D(a_1)$ multiplicirt und dividirt, so ergiebt sich:

$$\Delta K(a_1) = -\frac{D(a_1)}{D(a_1, a_2)} \times \frac{D(0)}{D(a_1)}\frac{D(0)}{D(a_1)} = -K(a_2, a_1)K(a_1)^2.$$

Wird dieser Werth in (14.) substituirt und auf die Differenzen der spätern Partialbrüche übergegangen, so erhält man:

$$(15.) \quad \Delta K(a_1, a_n) = (-1)^n K(a_{n+1}, a_1)[K(a_n, a_1)K(a_{n-1}, a_1) \ldots K(a_1)]^2,$$

und hieraus in Rücksicht auf (7.):

$$(16.)\qquad \Delta K(a_1, a_n) = (-1)^n \frac{1}{D(a_1, a_{n+1})\, D(a_1, a_n)} = (-1)^n \frac{1}{N_n N_{n+1}}.$$

Entwickelt man die durch $\Delta K(a_1, a_n)$ angedeuteten Partialbrüche und entfernt ihre Nenner, so ergiebt sich:

$$(17.)\quad (-1)^n = D(a_1, a_n)\, D(a_2, a_{n+1}) - D(a_1, a_{n+1})\, D(a_2, a_n) = N_n Z_{n+1} - N_{n+1} \cdot Z_n.$$

§. 6.

Für die Partialbrüche des Kettenbruchs

$$K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) = \cfrac{1}{\cfrac{a_1}{b_1} + \cfrac{1}{\cfrac{a_2}{b_2} + \ddots}}$$

ergiebt sich eine unabhängige Bildungs-Art aus (§. 2, 3 und 4) leicht, wenn die entsprechenden Elemente $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$ statt $a_1, a_2, \ldots$ gesetzt und die Elemente $b_1, b_2, \ldots$ ausgeschieden werden. Man erhält:

$$(1.)\quad \begin{cases} K\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = \frac{Z_1}{N_1} = \frac{b_1}{a_1}, \\ K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right) = \frac{Z_2}{N_2} = \frac{b_1 a_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2}, \\ K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_3}{b_3}\right) = \frac{Z_3}{N_3} = \frac{b_1 (a_2 a_3 + b_2 b_3)}{a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 b_3 + a_3 b_1 b_2}, \\ K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_4}{b_4}\right) = \frac{Z_4}{N_4} = \frac{b_1 (a_2 a_3 a_4 + a_2 b_3 b_4 + a_4 b_2 b_3)}{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 b_3 b_4 + b_1 b_2 b_3 b_4}, \\ \qquad\qquad a_1 a_4 b_2 b_3 \\ \qquad\qquad a_3 a_4 b_1 b_2 \\ K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_5}{b_5}\right) = \frac{Z_5}{N_5} = \frac{b_1 \left(\begin{matrix} a_2 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 b_4 b_5 + b_2 b_3 b_4 b_5 \\ a_2 a_5 b_3 b_4 \\ a_4 a_5 b_2 b_3 \end{matrix}\right)}{\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 + a_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \\ a_1 a_2 a_5 b_3 b_4 \quad a_3 b_1 b_2 b_4 b_5 \\ a_1 a_4 a_5 b_2 b_3 \quad a_5 b_1 b_2 b_3 b_4 \\ a_3 a_4 a_5 b_1 b_2 \end{matrix}} \end{cases}$$

u. s. w. Das Gesetz, welches hier zu Grunde liegt, ist leicht zu erkennen. Die Gruppen des Zählers und Nenners haben die Dimensionen, welche die Ordnungszahl des Partialbruchs angiebt. Die Gebilde der a bleiben unverändert dieselben, wie in (§. 3) angegeben wurde. Die b bilden die Ergänzungen für die Dimensionen der a und ihrer Stellenzahlen. Das Bildungs-

gesetz läfst sich daher allgemein so bezeichnen:

$$(2.)\quad K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{b_1 D(a_2, a_n; b_2, b_n)}{D(a_1, a_n; b_1, b_n)}$$

oder

$$(3.)\quad K\left(\frac{a_k}{b_k}, \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{b_k D(a_{k+1}, a_n; b_{k+1}, b_n)}{D(a_k, a_n; b_k, b_n)}.$$

Der Zähler oder Nenner hat, isolirt dargestellt, folgende Form:

$$(4.)\quad D\left(\frac{a_m}{b_m}, \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}, \ldots \frac{a_x}{b_x}\right) = \frac{D(a_m, a_x; b_m, b_x)}{b_m . b_{m+1} . b_{m+2} \ldots . b_x}.$$

Hieraus lassen sich nun alle in dem Früheren gefundenen Sätze leicht auf Kettenbrüche von der vorstehenden Form übertragen, und es ist:

$$(5.)\quad K\left(\frac{a_k}{b_k}, \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{b_k D(a_{k+1}, a_n; b_{k+1}, b_{n-1}) a_n + b_k D(a_{k+1}, a_{n-2}, b_{k+1} b_{n-2}) b_{n-1} b_n}{D(a_k, a_{n-1}; b_k, b_{n-1}) a_n + D(a_k, a_{n-2}; b_k, b_{n-2}) b_{n-1} b_n}$$

$$= \frac{Z_{n-1} a_n + Z_{n-2} b_{n-1} b_n}{N_{n-1} a_n + N_{n-2} b_{n-1} b_n},$$

$$(6.)\quad K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_n}{b_n}\right) K\left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_n}{b_n}\right) \ldots . K\left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{b_n}\right) K\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$= K\left(\frac{a_n}{b_n}, \frac{a_1}{b_1}\right) K\left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_1}{b_1}\right) \ldots . K\left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right) K\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$

$$= \frac{b_1 . b_2 . b_3 \ldots . b_n}{D(a_1, a_n; b_1, b_n)} = \frac{b_n b_{n-1}, \ldots . b_3 b_2 b_1}{D(a_n, a_1; b_n, b_1)},$$

$$(7.)\quad \Delta K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_n}{b_n}\right) = (-1)^n \frac{(b_1 b_2 \ldots . b_n)^2 b_{n+1}}{D(a_1, a_n; b_1, b_n) D(a_1, a_{n+1}; b_1, b_{n+1})}$$

$$= (-1)^n \frac{(b_1 . b_2 . b_3 \ldots . b_n)^2 b_{n+1}}{N_n N_{n+1}};$$

wie aus (8 und 16, §. 5 und 4, §. 6) folgt. Ferner ist:

$$(8.)\quad (-1)^n (b_1 . b_2 \ldots . b_n)^2 b_{n+1} = Z_{n+1} . N_n - Z_n N_{n+1}$$

$$= b_1 D(a_2, a_{n+1}; b_2, b_{n+1}) D(a_1, a_n; b_1, b_n) - b_1 D(a_2, a_n; b_2, b_n) . D(a_1, a_{n+1}; b_1, b_{n+1}).$$

Für *periodische* Kettenbrüche ergeben sich folgende entwickelte Ausdrücke:

$$(9.)\quad K_n\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \ldots .\right) = \frac{b(a^{n-1} + (n-2) a^{n-3} b^2 + (n-3)_2 a^{n-5} b^4 + \ldots .)}{a^n + (n-1) a^{n-2} b^2 + (n-2)_2 a^{n-4} b^4 + \ldots .}.$$

Der $(2n-1)$te und $(2n)$te Partialbruch eines Kettenbruchs, dessen Periode zwei Elemente enthält, ist

$$(10.)\quad K_{2n-1}\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots .\right)$$

$$= \frac{b_1 [(a_1 a_2)^{n-1} + (2n-3)(a_1 a_2)^{n-2} b_1 b_2 + (2n-4)_2 (a_1 a_2)^{n-3} (b_1 b_2)^2 + \ldots . (b_1 b_2)^{n-1}]}{a_1 [(a_1 a_2)^{n-1} + (2n-2)(a_1 a_2)^{n-2} b_1 b_2 + (2n-3)_2 (a_1 a_2)^{n-3} (b_1 b_2)^2 \ldots . n (b_1 b_2)^{n-1}]},$$

$$(11.)\quad K_{2n}\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots.\right)$$

$$= \frac{b_1 a_2\left[(a_1 a_2)^{n-1} + (2n-2)(a_1 a_2)^{n-2} b_1 b_2 + (2n-3)_2 (a_1 a_2)^{n-3} (b_1 b_2)^2 \ldots. n (b_1 b_2)^{n-1}\right]}{(a_1 a_2)^n + (2n-1)(a_1 a_2)^{n-1} b_1 b_2 + (2n-2)_2 (a_1 a_2)^{n-2} (b_1 b_2)^2 + \cdots (b_1 b_2)^n}.$$

Ist $a_1 = a_2 = a$ und $b_1 = 1$, $b_2 = b$, so ist

$$(12.)\quad K_n\left(a, \frac{a}{b}, a, \frac{a}{b}, \ldots.\right)$$

$$= \frac{a^{n-1} + (n-2) a^{n-3} b + (n-3)_2 a^{n-5} b^2 + (n-4)_3 a^{n-7} b^3 + \cdots}{a^n + (n-1) a^{n-2} b + (n-2)_2 a^{n-4} b^2 + (n-3)_3 a^{n-6} b^3 + \cdots}.$$

Wird $a_1 = a_2 = a$ und $b_2 = 1$ gesetzt, so erhält man aus (10. und 11.):

$$(13.)\quad K_n\left(\frac{a}{b}, a, \frac{a}{b}, a, \ldots.\right) = \frac{b\left[a^{n-1} + (n-2) a^{n-3} b + (n-3)_2 a^{n-3} b^2 + \cdots.\right]}{a^n + (n-1) a^{n-2} b + (n-2)_2 a^{n-2} b^2 + \cdots.}.$$

Aus (7.) ergiebt sich ferner:

$$(14.)\quad \Delta K_n\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots.\right) = (-1)^n \frac{b_1^{n+1} b_2^n}{N_n N_{n+1}},$$

$$(15.)\quad \Delta K_n\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \ldots.\right) = (-1)^n \frac{b^{2n+1}}{N_n N_{n+1}},$$

$$(16.)\quad \Delta K_n\left(a, \frac{a}{b}, a, \frac{a}{b}, \ldots.\right) = (-1)^n \frac{b^n}{N_n N_{n+1}},$$

$$(17.)\quad \Delta K_n\left(\frac{a}{b}, a, \frac{a}{b}, a, \ldots.\right) = (-1)^n \frac{b^{n+1}}{N_n N_{n+1}}.$$

Diese Sätze werden später zu weitern Anwendungen dienen. Die *Convergenz* der hier aufgeführten Kettenbrüche unterliegt andern Gesetzen, als (16. §. 5) besagt.

§. 7.

Die entwickelte Darstellung des Kettenbruchs

$$K(b_1 : a_1, b_n : a_n) = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3} \cdots}}$$

in Partialbrüchen erzeugt Gebilde besonderer Art; wie das Nachstehende zeigt:

$$(1.)\quad \begin{cases} K(b_1 : a_1) = \dfrac{Z_1}{N_1} = \dfrac{b_1}{a_1}, \\ K(b_1 : a_1, b_2 : a_2) = \dfrac{Z_2}{N_2} = \dfrac{b_1 a_2}{a_1 a_2 + b_2}, \end{cases}$$

$$(1.)\quad \begin{cases} K(b_1 : a_1,\ b_3 : a_3) = \dfrac{Z_3}{N_3} = \dfrac{b_1(a_2a_3 + b_2)}{a_1a_2a_3 + a_1b_3 + a_3b_2}, \\ K(b_1 : a_1,\ b_4 : a_4) = \dfrac{Z_4}{N_4} = \dfrac{b_1(a_2a_3a_4 + a_2b_4 + a_4b_2)}{a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2b_4 + a_1a_4b_3 + a_3a_4b_2 + b_2b_4}, \\ K(b_1 : a_1,\ b_5 : a_5) = \dfrac{Z_5}{N_5} = \dfrac{b_1(a_2a_3a_4a_5 + a_2a_3b_5 + a_2a_5b_4 + a_4a_5b_3 + b_4b_5)}{a_1a_2a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3b_5 + a_1b_4b_5 \quad a_1a_2a_5b_4 \quad a_3b_2b_5 \quad a_1a_4a_5b_3 \quad a_5b_2b_4 \quad a_3a_4a_5b_2} \end{cases}.$$

Für die Kettenbrüche $K(b_1 : a_1,\ b_6,\ a_6)$ und $K(b_1 : a_1,\ b_7 : a_7)$ sollen Zähler und Nenner getrennt dargestellt werden, um die Ausdrücke bequemer übersehen zu können. Es ist

$$Z_6 = b_1(a_2a_3a_4a_5a_6 + a_2a_3a_4b_6 + a_2b_4b_6 \quad a_2a_3a_6b_5 \quad a_4b_3b_6 \quad a_2a_5a_6b_4 \quad a_6b_3b_5 \quad a_4a_5a_6b_3)$$

$$N_6 = a_1a_2a_3a_4a_5a_6 + a_1a_2a_3a_4b_6 + a_1a_2b_4b_6 + b_2b_4b_6 \quad a_1a_2a_3a_6b_5 \quad a_1a_4b_3b_6 \quad a_1a_2a_5a_6b_4 \quad a_1a_6b_3b_5 \quad a_1a_4a_5a_6b_3 \quad a_3a_4b_2b_6 \quad a_3a_4a_5a_6b_2 \quad a_3a_6b_2b_5 \quad a_5a_6b_2b_4$$

$$Z_7 = b_1(a_2a_3a_4a_5a_6a_7 + a_2a_3a_4a_5b_7 + a_2a_3b_5b_7 + b_3b_5b_7 \quad a_2a_3a_4a_7b_6 \quad a_2a_5b_4b_7 \quad a_2a_3a_6a_7b_5 \quad a_2a_7b_4b_6 \quad a_2a_5a_6a_7b_4 \quad a_4a_5b_3b_7 \quad a_4a_5a_6a_7b_3 \quad a_4a_7b_3b_6 \quad a_6a_7b_3b_5)$$

$$N_7 = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 + a_1a_2a_3a_4a_5b_7 + a_1a_2a_3b_5b_7 + a_1b_3b_5b_7 \quad a_1a_2a_3a_4a_7b_6 \quad a_1a_2a_5b_4b_7 \quad a_3b_2b_5b_7 \quad a_1a_2a_3a_6a_7b_5 \quad a_1a_2a_7b_4b_6 \quad a_5b_2b_4b_7 \quad a_1a_2a_5a_6a_7b_4 \quad a_1a_4a_5b_3b_7 \quad a_7b_2b_4b_6 \quad a_1a_4a_5a_6a_7b_3 \quad a_1a_4a_7b_3b_6 \quad a_3a_4a_5a_6a_7b_2 \quad a_1a_6a_7b_3b_5 \quad a_3a_4a_5b_2b_7 \quad a_3a_4a_7b_2b_6 \quad a_3a_6a_7b_2b_5 \quad a_5a_6a_7b_2b_4$$

u. s. w. Hieraus ist die abhängige Bildungs-Art leicht zu erkennen.

Die Zahl der Gruppen stimmt ganz mit den in (§. 4) gefundenen überein. Was die Elemente b_1, b_2, b_3, ... betrifft, so kommt das Element b_1 in allen Gebilden der ***Zähler*** vor, dagegen nirgend in den Gebilden der ***Nenner***. Das Element b_2 erscheint nicht unter denen der ***Zähler;*** wie es in der Natur der Sache liegt. Sieht man daher von dem Elemente b_1 ab, so werden die Gruppen im ***Zähler*** des *n*ten Partialbruchs aus den Elementen a_2, a_3, a_4, ... a_n und b_3, b_4, b_5, ... b_n, dagegen die im ***Nenner*** aus den Elementen a_1, a_2, a_3, ... a_n und b_2, b_3, ... b_n erzeugt.

Die Elemente a_1, a_2, a_3, ... befolgen genau die Gesetze, welche in (§. 2, 3 und 4) angegeben wurden. Mit ihnen sind die Elemente b_2, b_3, ... auf eine Weise verschlungen, die jetzt zu erörtern ist. Sie kommen, für sich allein betrachtet, im zweiten Gliede zur 1ten, im dritten zur 2ten, im vierten zur 3ten Classe u. s. w. vor, also im ersten Gliede zur $(r-1)$ten Classe. Die Dimensionen der Glieder überhaupt nehmen der Reihe nach um *eine* Einheit ab; nicht um *zwei* Einheiten, wie die früher betrachteten (§. 2).

Die Gebilde der *b* characterisiren sich als Combinationen besonderer Art. Sie ergänzen die Gebilde der *a* zu einer bestimmten Classe, erzeugen durch ihren Zutritt keine neuen Gruppen und zeigen sich in umgekehrter Ordnung mit den Gebilden der *a* verbunden. Sie unterscheiden sich von den Gebilden der *a*, deren Erzeugungsgesetzen sie im Wesentlichen unterliegen, dadurch, dafs die Stellenzahlen der *b* ***in horizontaler Richtung um zwei und mehr Einheiten, in verticaler Richtung*** aber stets nur ***um eine Einheit*** zunehmen.

Um die Gruppen im ***Zähler*** aus den Elementen $b_3, b_4, b_5, \ldots$ und im ***Nenner*** aus den Elementen b_2, b_3, b_4, ... zu finden, kann man sie, für sich, zu der erforderlichen Classe auf die genannte Weise in umgekehrter Ordnung aufstellen und dann der Reihe nach mit den Gebilden der *a* zusammentreten lassen. Diese Bildungsweise soll auf folgende Art angedeutet werden:

$$(2.) \qquad \boldsymbol{K}(b_1 : a_1,\ b_n : a_n) = \frac{b_1 \boldsymbol{D}(a_2, a_n; b_n, b_3)}{\boldsymbol{D}(a_1, a_n; b_n, b_2)};$$

die der einzelnen Gruppen-Aggregate im Zähler und Nenner auf folgende Art:

$$(3.) \qquad b_1 \boldsymbol{D}(a_2, a_n; b_n, b_3)^{r,s}; \qquad \boldsymbol{D}(a_1, a_n; b_n, b_2)^{r,s}.$$

r bezieht sich auf die Gebilde der *a*, *s* auf die *b*. Wendet man die Gesetze auf die Bildung des 3ten Gliedes im ***Zähler*** und des 4ten Gliedes im ***Nenner*** des 8ten Partialbruchs von $\boldsymbol{K}(b_1 : a_1)(b_n : a_n)$ an, so erhält man, wenn man

(4. §. 2) benutzt:

$$(4.)\quad b_1 D(a_2, a_8; b_8, b_3)^{3,2} = \begin{matrix} a_2a_3a_4b_6b_8 \\ a_2a_3a_6b_5b_8 \\ a_2a_3a_8b_5b_7 \\ a_2a_5a_6b_4b_8 \\ a_2a_5a_8b_4b_7 \\ a_2a_7a_8b_4b_6 \\ a_4a_5a_6b_3b_8 \\ a_4a_5a_8b_3b_7 \\ a_4a_7a_8b_3b_6 \\ a_6a_7a_8b_3b_5 \end{matrix} \text{ und } D(a_1, a_8; b_8, b_2)^{2,3} = \begin{matrix} a_1a_2b_4b_6b_8 \\ a_1a_4b_3b_6b_8 \\ a_1a_6b_3b_5b_8 \\ a_1a_8b_3b_5b_7 \\ a_3a_4b_2b_5b_8 \\ a_3a_6b_2b_5b_8 \\ a_3a_8b_2b_5b_7 \\ a_5a_6b_2b_4b_8 \\ a_5a_8b_2b_4b_7 \\ a_7a_8b_2b_4b_6 \end{matrix}$$

Der Ausdruck (2.) läfst sich so verallgemeinern:

$$(5.)\quad K(b_k : a_k;\ b_n : a_n) = \frac{b_k D(a_{k+1}, a_n; b_n, b_{k+2})}{D(a_k, a_n; b_n, b_{k+1})}.$$

Aus (1.) folgen und rechtfertigen sich nachstehende ***zurücklaufende*** Bildungs-Arten:

$$(6.)\quad K(b_1 : a_1, b_n : a_n) = \frac{b_1 D(a_2, a_{n-1}; b_{n-1}, b_3) a_n + b_1 D(a_2, a_{n-2}; b_{n-2}, b_3) b_n}{D(a_1, a_{n-1}; b_{n-1}, b_2) a_n + D(a_1, a_{n-2}; b_{n-2}, b_2) b_n}$$
$$= \frac{Z_{n-1} a_n + Z_{n-2} b_n}{N_{n-1} a_n + N_{n-2} b_n}.$$

Dies Gesetz läfst sich leicht nach (5.) verallgemeinern. Geht man von den spätern Elementen aus und zu den frühern über, so ergiebt sich aus (1.):

$$(7.)\quad K(b_k : a_k,\ b_n : a_n) = \frac{b_k D(a_{k+1}, a_n; b_n, b_{k+2})}{a_k D(a_{k+1}, a_n; b_n, b_{k+2}) + b_{k+1} D(a_{k+2}, a_n; b_n, b_{k+3})}$$
$$= b_k \frac{a_{k+1} D(a_{k+2}, a_n; b_n, b_{k+3}) + b_{k+2} D(a_{k+3}, a_n; b_n, b_{k+4})}{a_k D(a_{k+1}, a_n; b_n, b_{k+2}) + b_{k+1} D(a_{k+2}, a_n; b_n, b_{k+3})}.$$

Es sei der Kettenbruch

$$K(b_1 : a_1, b_x : a_x, b_{x+1} : a_{x+1}, b_n : a_n) = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2} \ddots \cfrac{b_x}{a_x + \cfrac{b_{x+1}}{a_{x+1}} \ddots \cfrac{b_n}{a_n}}}$$

gegeben und der Partialbruch vom $(x+1)$ten Elemente an sei dargestellt, also:

$$\frac{P}{Q} = K(b_{x+1} : a_{x+1};\ b_n : a_n) = \frac{b_{x+1} D(a_{x+2}, a_n; b_n, b_{x+3})}{D(a_{x+1}, a_n; b_n, b_{x+2})},$$

so ist auch

$$K(b_1 : a_1, b_x : a_x, P : Q) = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2} \cdots \cfrac{b_x}{a_x + \cfrac{P}{Q}}}.$$

Wird nun in (6.) $P = b_n$ und $Q = a_n$, $a_{n-1} = a_x$, $b_{n-1} = b_x$ gesetzt, so erhält man:

$$K(b_1 : a_1, b_n : a_n) = \frac{b_1 D(a_2, a_x; b_x, b_3) Q + b_1 D(a_2, a_{x-1}; b_{x-1}, b_3) P}{D(a_1, a_x; b_x, b_2) Q + D(a_1, a_{x-1}; b_{x-1}, b_2) P},$$

also auch

(8.) $$K(b_1 : a_1, b_n : a_n)$$

$$= \frac{b_1 D(a_2, a_x; b_x, b_3) D(a_{x+1}, a_n; b_n, b_{x+2}) + b_1 D(a_2, a_{x-1}, b_{x-1}, b_3) b_{x+1} D(a_{x+2}, a_n, b_n, b_{x+3})}{D(a_1, a_x; b_x, b_2) D(a_{x+1}, a_n; b_n, b_{x+2}) + D(a_1, a_{x-1}, b_{x-1}, b_2) b_{x+1} D(a_{x+2}, b_n; b_n, b_{x+3})}$$

$$= \frac{Z_x Q + Z_{x-1} P}{N_x . Q + N_{x-1} P} = \frac{Z_x . N_{n-x} + Z_{x-1} Z_{n-x}}{N_x N_{n-x} + N_{x-1} Z_{n-x}}.$$

Dasselbe Gesetz liegt den Gleichungen (11. und 12. §. 2) zum Grunde.

Der *symmetrische* Kettenbruch

$$K(b_n : a_n, b_1 : a_1) = \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \cdots \cfrac{b_1}{a_1}}$$

unterliegt den gleichen Bestimmungen. Es ist

(9.) $$K(b_n : a_n, b_1 : a_1) = \frac{b_n D(a_{n-1}, a_1; b_1, b_{n-2})}{D(a_n, a_1; b_1, b_{n-1})},$$

oder auch

(10.) $$K(b_n : a_n, b_k : a_k) = \frac{b_n D(a_{n-1}, a_k; b_k, b_{n-2})}{D(a_n, a_k; b_k, b_{n-1})}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit (2. und 5.), so zeigt sich:

(11.) Dafs weder Zähler noch Nenner der correspondirenden Partialbrüche *symmetrischer* Kettenbrüche einander gleich sind; denn sie werden nicht auf gleiche Weise erzeugt.

Vergleicht man nun die aufeinander folgenden Partialbrüche zweier *symmetrischen* Kettenbrüche, so ist nach (5.):

(12.) $$K(b_1 : a_1, b_n : a_n) K(b_2 : a_2, b_n : a_n) \ldots . K(b_{n-1} : a_{n-1}, b_n : a_n) K(b_n : a_n)$$

$$= \frac{b_1 D(a_2, a_n; b_n, b_3)}{D(a_1, a_n; b_n, b_2)} \cdot \frac{b_2 D(a_3, a_n; b_n, b_4)}{D(a_2, a_n; b_n, b_3)} \ldots . \frac{b_{n-1} D(a_n)}{D(a_{n-1}, a_n; b_n)} \cdot \frac{b_n D(0)}{D(a_n)}$$

$$= \frac{b_1 . b_2 . b_3 \ldots . b_n}{D(a_1, a_n; b_n, b_2)}.$$

Aus (10.) ergiebt sich

$$(13.)\quad K(b_n : a_n, b_1 : a_1)\,K(b_{n-1} : a_{n-1}, b_1 : a_1) \ldots\ K(b_2 : a_2, b_1 : a_1)\,K(b_1 : a_1)$$
$$= \frac{b_n D(a_{n-1}, a_1; b_1, b_{n-2})}{D(a_n, a_1; b_1, b_{n-1})} \cdot \frac{b_{n-1} D(a_{n-2}, a_1; b_1, b_{n-3})}{D(a_{n-1}, a_1; b_1, b_{n-2})} \ldots\ \frac{b_2 D(a_1)}{D(a_2, a_1; b_1)} \cdot \frac{b_1 D(0)}{D(a_1)}$$
$$= \frac{b_n . b_{n-1} . b_{n-2} \ldots . b_2 . b_1}{D(a_n, a_1; b_1, b_{n-1})}.$$

Auch hier zeigt sich keine Gleichheit.

Sehr einfache Formeln ergeben sich, wenn man die gefundenen Gesetze auf *periodische* Kettenbrüche anwendet. Wird $b_1 = b_2 = b_3 \ldots = b$ und $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a$ gesetzt, so erhält man:

$$(14.)\quad K_n(b : a, b : a, \ldots) = \frac{b(a^{n-1} + (n-2)\,a^{n-3}b + (n-3)_2\,a^{n-5}b^2 + \ldots)}{a^n + (n-1)\,a^{n-2}b + (n-2)_2\,a^{n-4}b^2 + \ldots}.$$

Der $(2n-1)$te und $2n$te Partialbruch eines Kettenbruchs, in welchem die Periode a_1, a_2 vorkommt, und die b einander gleich sind, ist

$$(15.)\quad K_{2n-1}(b : a_1, b : a_2, b : a_1, b : a_2 \ldots)$$
$$= \frac{b[(a_1a_2)^{n-1} + (2n-3)(a_1a_2)^{n-2}b + (2n-4)_2(a_1a_2)^{n-3}b^2 + \ldots b^{n-1}]}{a_1[(a_1a_2)^{n-1} + (2n-2)(a_1a_2)^{n-2}b + (2n-3)_2(a_1a_2)^{n-3}b^2 + \ldots nb^{n-1}]},$$

$$(16.)\quad K_{2n}(b : a_1, b : a_2, b : a_1, b : a_2 \ldots)$$
$$= \frac{ba_2[(a_1a_2)^{n-1} + (2n-2)(a_1a_2)^{n-2}b + (2n-3)_2(a_1a_2)^{n-3}b^3 + \ldots nb^{n-1}]}{(a_1a_2)^n + (2n-1)(a_1a_2)^{n-1}b + (2n-2)_2(a_1a_2)^{n-2}b^2 + \ldots b^n}.$$

Aus (12. und 13. §. 6 und 14. §. 7) ist ferner:

$$(17.)\quad K_n(b : a, b : a, \ldots) = K_n\left(\frac{a}{b}, a, \frac{a}{b}, a, \ldots\right) = b\,.\,K_n\left(a, \frac{a}{b}, a, \frac{a}{b}, \ldots\right)$$
$$= \frac{b}{a + \frac{b}{a} + \ddots} \quad = \frac{1}{\frac{a}{b} + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\frac{a}{b} + \frac{1}{a} \ddots}}} \quad = \frac{b}{a + \cfrac{1}{\frac{a}{b} + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\frac{b}{a} + \ddots}}}}$$

Aus (17. §. 6) ergiebt sich

$$(18.)\quad \Delta K_n(b : a, b : a, \ldots) = (-1)^n \frac{b^{n+1}}{N_n N_{n+1}}.$$

§. 8.

Es sei

$$K(b_1 : a_1, b_2 : a_2, \ldots b_n : a_n) = \frac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3} \ddots}} \quad = \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{R}} = S,$$

so ist

$$mS = \frac{m_1 bR}{a_1 R + b_2} = \frac{mb_1}{a_1 + \frac{b_2}{R}}$$

und hieraus

$$S = K(b_1 : a_1, b_n : a_n) = \frac{mb_1 R}{ma_1 R + mb_2} = \frac{mb_1}{ma_1 + \frac{b_2 m}{R}} = \frac{mb_1}{ma_1 + \cfrac{mb_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3} \cdots}}$$

Dies läfst sich auf jeden andern Kettenbruch und auf alle späteren Elemente in demselben ausdehnen. Es gilt auch wenn $m = \frac{1}{p}$ ist. Daraus folgt Nachstehendes.

(1.) Es kann ***Zähler*** und ***Nenner*** irgend eines Elements und der Zähler des nächstfolgenden mit einer und derselben Zahl multiplicirt und dividirt, und dies mehreremal wiederholt werden, ohne dafs der Werth des Kettenbruchs geändert wird. Es ist folglich

(2.) $$K(b_1 : a_1, b_2 : a_2, \ldots) = K(mb_1 : ma_1, mb_2 : a_2, \ldots pb_k : pa_k, pb_{k+1} : a_{k+1}, \ldots).$$

Wendet man diese Bemerkungen auf den Kettenbruch $K(b_1 : a_1, b_n : a_n)$ an, so läfst sich derselbe durch fortgesetzte Division in einen Kettenbruch verwandeln, in welchem die ***Einheit*** der Zähler aller im einzelnen Bruche ist (1. §. 1). Es ist

(3.) $$K(b_1 : a_1, b_n : a_n) = \cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \cfrac{1}{\frac{b_1 a_2}{b_2} + \cfrac{1}{\frac{b_2 a_3}{b_1 b_3} + \cfrac{1}{\frac{b_1 b_3 a_4}{b_2 b_4} + \cdots}}}}$$

Das allgemeine Gesetz für diese Umwandlung ist:

(4.) $$\cfrac{1}{\frac{b_2 b_4 b_6 \ldots b_{2n-4} b_{2n-2} a_{2n-1}}{b_1 b_3 b_5 \ldots b_{2n-3} b_{2n-1}} + \cfrac{1}{\frac{b_1 b_3 b_5 \ldots b_{2n-5} b_{2n-3} b_{2n-1} a_{2n}}{b_2 b_4 b_6 \ldots b_{2n-6} b_{2n-4} b_{2n-2}}}}.$$

Wendet man ein ähnliches Verfahren auf den Kettenbruch

(5.) $$K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_n}{b_n}\right) = \cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \cfrac{1}{\frac{a_2}{b_2} + \cfrac{1}{\frac{a_3}{b_3} + \cdots}}}$$

an, so erhält man

$$(6.)\quad K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_n}{b_n}\right) = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_1 b_2}{a_2 + \cfrac{b_2 b_3}{a_3 + \cfrac{b_3 b_4}{a_4} \cdots}}}$$

Die Formeln (3. und 6.) geben ein einfaches Mittel, die Differenz des $n$ten und $(n+1)$ten Partialbruchs von $K(b_1 : a_1, b_2 : a_2, \ldots.)$ auszudrücken. Setzt man nämlich $b_1 = c_1$, $b_1 b_2 = c_2$, $b_2 b_3 = c_3$, ... $b_{n-1} b_n = c_n$ und $b_n b_{n+1} = c_{n+1}$, so ist aus (6.):

$$K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) = K(c_1 : a_1, c_{n+1} : a_{n+1}) = \cfrac{c_1}{a_1 + \cfrac{c_2}{a_2} + \cdots}$$

und

$$\Delta K\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_n}{b_n}\right) = \Delta K(c_1 : a_1, c_n : a_n).$$

Da nun aus (14. §. 6.)

$$\Delta K\left(\frac{a_1}{b_4}, \frac{a_n}{b_n}\right) = (-1)^n \frac{b_1 . b_1 b_2 . b_2 b_3 \ldots . b_{n-1} b_n . b_n b_{n+1}}{N_n N_{n+1}} = (-1)^n \frac{c_1 c_2 \ldots . c_n c_{n+1}}{N_n N_{n+1}}$$

ist, so erhält man:

$$(7.)\quad \Delta K(c_1 : a_1, c_n : a_n) = (-1)^n \frac{c_1 c_2 c_3 \ldots . c_n c_{n+1}}{N_n N_{n+1}}.$$

Das gleiche Resultat ergiebt sich aus (3. und 4.), wenn man (16. §. 5) anwendet. Da nun

$$\Delta K(b_1 : a_1, b_n : a_n) = K(b_1 : a_1, b_{n+1} : a_{n+1}) - K(b_1 : a_1, b_n : a_n)$$

$$= \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{b_1 D(a_2, a_{n+1}; b_{n+1}, b_3)}{D(a_1, a_{n+1}; b_{n+1}, b_2} - \frac{b_1 D(a_1, a_n; b_n, b_3)}{D(a_1, a_n; b_n, b_2} = (-1)^n \frac{b_1 b_2 b_3 \ldots . b_{n+1}}{N_n N_{n+1}}$$

ist, so ergiebt sich, nach Entfernung der Nenner, folgendes allgemeine Gesetz für Kettenbrüche von der Form $K(b_1 : a_1; b_n : a_n)$:

$$(8.)\quad (-1)^n b_1 b_2 b_3 \ldots . b_{n+1} = b_1 D(a_2, a_{n+1}; b_{n+1}, b_3) D(a_1, a_n; b_n, b_2) - b_1 D(a_2, a_n; b_n, b_3) D(a_1, a_{n+1}; b_{n+1}, b_2) = Z_{n+1} N_n - N_{n+1} Z_n.$$

Die Gleichung (18. §. 7) stimmt mit den hier gefundenen Sätzen überein.

Nicht uninteressant ist es, den Einflufs zu sehen, welchen die *Vorzeichen* der einzelnen Elemente eines Kettenbruchs auf den Werth der Partialbrüche oder auf den des Kettenbruchs haben. Es dient dazu die eben angegebene Methode, oder auch die directe Benutzung der in den frühern

Paragraphen enthaltenen Entwicklungen. Für den Kettenbruch

$$K(-b_1:a_1, -b_2:a_2 \ldots. -b_n:a_n) = \cfrac{-b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3} \cdots}}$$

ist

$$(11.) \quad K(-b_1:a_1, -b_2:a_2 \ldots. -b_n:a_n)$$
$$= K(b_1:-a_1; b_2:a_2, b_3:-a_3 \ldots. b_n:(-1)^n a_n) = \cfrac{b_1}{-a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{-a_3} \cdots \cfrac{b_n}{\pm a_n}}}.$$

Für den Kettenbruch

$$K(b_1:-a_1, b_2:-a_2 \ldots. b_n:-a_n) = \cfrac{b_1}{-a_1 + \cfrac{b_2}{-a_2} \cdots}$$

ist

$$(12.) \quad K(b_1:-a_2, b_2:-a_2 \ldots. b_n:-a_n) = K(-b_1:a_2, b_2:a_2 \ldots. b_n:a_n)$$
$$= -K(b_1:a_2, b_2:a_2 \ldots. b_n:a_n) = \cfrac{-b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_2} + \cdots}$$

Folgende zwei Kettenbrüche:

$$\cfrac{-b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}} \quad \text{und} \quad \cfrac{-b_1}{a_2 - \cfrac{b_2}{a_3 - \cfrac{b_3}{a_3}} \cdots}$$

sind, wie leicht zu sehen, einander gleich. Aus (11.) ist also

$$(13.) \quad \cfrac{-b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}} \cdots} = K(-b_1:a_1, -b_n:a_n) = K(b_1:a_1, b_2:a_2 \ldots. b_n:(-1)^n a_n)$$
$$= \cfrac{b_1}{-a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{-a_3}} \cdots}$$

Ferner ist

$$(14.)\quad K(b_1:a_1, b_2:a_2, b_3:-a_3, \ldots b_n:(-1)^n a_n)$$
$$= -K(b_1:a_1, b_2:-a_2, \ldots b_n:(-1)^{n-1} a_n)$$
$$= \cfrac{b_1}{-a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{-a_3+\cdots}}} = \cfrac{-b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{-a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}}$$

Möbius hat in seiner Abhandlung (Bd. 6. d. Journ. S. 215) Kettenbrüche von der Form

$$(15.)\quad \cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3-\cfrac{b_4}{a_4}\cdots}}} = \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{-a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{-a_4}\cdots}}}$$

untersucht.

(Der Schlufs im nächsten Heft.)

Druckfehler im 47ten Bande.

S. 290 Z. 7 lies a_3 statt a_{3r}
— 291 — 9 l. In Reihen . . . . haben sie st. Die Reihen . . . . haben
— 295 — 2 l. $\overset{0}{K}_a$ st. $\overset{0}{K}$
— 295 — 5 fehlt zwischen u_1 und $2K_1$ das Zeichen $+$
— 297 — 23 l. die so st. diese
— 298 — 6 u. 7 l. zur Erzielung . . . . erfordert werden st. die Erzielung . . . . erfordern,
— 298 — 24 l. den *Abel*schen . . . . zukommen st. die *Abel*schen . . . . zusammen.
— 299 — 20 l. u statt a
— 300 — 6 l. $\int_{a_\alpha}^{\overline{+}\infty}$ st. $\int_{a_\alpha}^{-\infty}$
— 300 Formel (35.) l. $\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{J}_1 + \overset{\mathfrak{a}}{J}_1, \ldots)_\mathfrak{a}$ st. $\mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\mathfrak{a}-1}{J}_\mathfrak{a} + \overset{\mathfrak{a}}{J}_\mathfrak{a}, \ldots)_\mathfrak{a}$
— 301 Formel (36.). Die zweite dieser Reihe ist noch mit $\sqrt[4]{\left(\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\right)}$, die dritte mit $\sqrt[4]{\left(\frac{P(a_{2\mathfrak{b}})}{Q'(a_{2\mathfrak{b}})}\right)}$ zu multipliciren.
— 304 Z. 12 l. so mufs ich auf . . . . verweisen st. wird . . . . anzeigen.
— 304 Formel (56.) fehlt vor δ_1, δ_2 der Factor 2.
— 305 Z. 11 fehlt hinter Formeln: (15.)
— 306 — 12 l. $\frac{1}{2}\overset{\alpha}{\omega}'_\mathfrak{a}$ st. $\frac{1}{2}\overset{\alpha}{\omega}'$

7.

Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen; nebst einigen Anwendungen auf die Berechnung der Wurzeln von Gleichungen.

(Von Herrn Dr. *Öttinger,* ord. Prof. der Mathematik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.)

(Schlufs der Abhandlung Nr. 6. im vorigen Heft.)

---

§. 9.

Sehr wichtig ist für die Darstellung der ***Zahlenwerthe*** von Kettenbrüchen, insbesondere von *periodischen,* die Reduction der Kettenbrüche auf eine ***kleinere Elementenzahl.*** Diese Reduction wollen wir an dem Kettenbruch von der allgemeinen Form

$$K(b_1:a_1,\ b_2:a_2,\ \ldots.)$$

zeigen; woraus sich die Anwendung auf specielle Fälle leicht ergeben wird. Zur Grundlage dient die Gleichung (6. §. 7). Durch Multiplication mit dem Nenner erhält man:

$$K(b_1:a_1,\ b_n:a_n)D(a_1,\ a_{n-1};\ b_{n-1},\ b_2)a_n + K(b_1:a_1,\ b_n:a_n)D(a_1,\ a_{n-2};\ b_{n-2},\ b_2)b_n$$
$$= b_1 D(a_2,\ a_{n-1},\ b_{n-1},\ b_3)a_n + b_1 D(a_2,\ a_{n-2};\ b_{n-2},\ b_3)b_n.$$

Der Kürze und bessern Übersicht wegen soll bei der nachfolgenden Entwicklung

$K(a_1;\ a_n)$ statt $K(b_1:a_1,\ b_n:a_n)$, $D(a_1;\ a_{n-1})$ statt $D(a_1,\ a_{n-1};\ b_{n-1},\ b_2)$

u. s. w. gesetzt werden.

Dividirt man die vorstehende Gleichung durch

$$D(a_1,\ a_{n-1};\ b_{n-1},\ b_2),$$

so ergiebt sich:

$$K(a_1;\ a_n)a_n + K(a_1;\ a_n)\frac{D(a_1;\ a_{n-2})b_n}{D(a_1;\ a_{n-1})} - \frac{b_1 D(a_2;\ a_{n-1})a_n}{D(a_1;\ a_{n-1})} = \frac{b_1 D(a_2;\ a_{n-2})b_n}{D(a_1;\ a_{n-1})}.$$

Wird nun $\frac{b_1 D(a_2,\ a_{n-1})}{D(a_1;\ a_{n-1})}$ aus (2. §. 7) durch $K(a_1;\ a_{n-1})$ ersetzt und $K(a_1;\ a_{n-1})\frac{D(a_1,\ a_{n-2})b}{D(a_1,\ a_{n-1})}$ auf beiden Seiten abgezogen, so geht die vorstehende Gleichung in

$$[K(a_1; a_n) - K(a_1; a_{n-1})]a_n + [K(a_1; a_n) - K(a_1; a_{n-1})]\frac{D(a_1; a_{n-2})b_n}{D(a_1; a_{n-1})}$$
$$= -K(a_1; a_{n-1})\frac{D(a_1; a_{n-2})b_n}{D(a_1; a_{n-1})} + \frac{b_1 D(a_2; a_{n-2})b_n}{D(a_1; a_{n-1})}$$

über. Wird $K(a_1; a_{n-1}) = \frac{b_1 D(a_2; a_{n-1})}{D(a_1; a_{n-1})}$ rechts vom Gleichheitszeichen eingeführt und dann zu gleicher Benennung gebracht, so erhält man:

$$[K(a_1; a_n) - K(a_1; a_{n-1})]\left[a_n + \frac{D(a_1; a_{n-2})b_n}{D(a_1; a_{n-1})}\right]$$
$$= -\frac{b_1 D(a_2; a_{n-1})D(a_1; a_{n-2})b_n - b_1 D(a_2; a_{n-2})D(a_1; a_{n-1})b_n}{(D(a_1; a_{n-1}))^2}.$$

Nun läfst sich der Zähler rechts nach (8. §. 8) durch $(-1)^{n-2}b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$ ausdrücken; also ist

$$(1.) \quad K(a_1; a_n) - K(a_1; a_{n-1}) = (-1)^{n-1}\frac{\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{(D(a_1; a_{n-1}))^2}}{\frac{D(a_1; a_{n-2})b_n}{D(a_1; a_{n-1})} + a_n}$$

und

$$(2.) \quad K(a_1; a_n) = K(a_1; a_{n-1})(-1)^{n-1}\frac{\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}{(D(a_1; a_{n-1}))^2}}{\frac{D(a_1; a_{n-2})b_n}{D(a_1; a_{n-1})} + a_n}.$$

Wird statt a_n der Kettenbruch

$$(3.) \quad a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + \cdots \frac{b_{n+m}}{a_{n+m}} = a_n + K(a_{n+1}; a_{n+m})$$

in (2.) gesetzt, und der neue Kettenbruch in (3.) selbst wieder nach dem Gesetze (2.) behandelt, so erhält man:

$$(4.) \quad K(a_{n+1}; a_{n+m}) = K(a_{n+1}; a_{n+m-1})(-1)^{m-1}\frac{\frac{b_{n+1} \cdot b_{n+2} \ldots b_{n+m}}{(D(a_{n+1}; a_{n+m-1}))^2}}{\frac{D(a_{n+1}; a_{n+m-2})b_{n+m}}{D(a_{n+1}; a_{n+m-1})} + a_{n+m}}.$$

Wird auf gleiche Weise mit a_{n+m} verfahren, dafür der Kettenbruch

$$(5.) \quad a_{n+m} + \frac{b_{n+m+1}}{a_{n+m+1}} \cdots \frac{b_{n+m+p}}{a_{n+m+p}} = a_{n+m} + K(a_{n+m+1}; a_{n+m+p})$$

gesetzt und auch dieser Bruch eben so behandelt, so erhält man:

$$(6.)\quad K(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p}) = K(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-1})(-1)^{p-1}\frac{\dfrac{b_{n+m+1}.b_{n+m+2}\,\ldots.\,b_{n+m+p}}{[D(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-1})]^2}}{\dfrac{D(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-2})\,b_{n+m+p}}{D(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-1})}+a_{n+m+p}}.$$

Das Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden, und es wird dadurch die beabsichtigte Umformung erlangt; es sind die Werthe von (4. und 6. in 2.) einzuführen, und die Substitutionen nach Gefallen fortzusetzen. Hieraus ergiebt sich dann folgende Formel:

$$(7.)\quad K(b_1:a_1,\, b_2:a_2\,\ldots.\,b_{n+m+p}:a_{n+m+p}\,\ldots.)$$

$$= \cfrac{K(a_1;\, a_{n-1})(-1)^{n-1}\dfrac{b_1 b_2\,\ldots.\,b_n}{[D(a_1;\, a_{n-1})]^2}}{\dfrac{D(a_1;\, a_{n-2})\,b_n}{D(a_1;\, a_{n-1})}} + a_n + \cfrac{K(a_{n+1};\, a_{n+m-1})(-1)^{m-1}\dfrac{b_{n+1}b_{n+2}\,\ldots.\,b_{n+m}}{[D(a_{n+1};\, a_{n+m-1})]^2}}{\dfrac{D(a_{n+1};\, a_{n+m-2})\,b_{n+m}}{D(a_{n+1};\, a_{n+m-1})}} + a_{n+m} + \cfrac{K(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-1})(-1)^{p-1}\dfrac{b_{n+m+1}\,\ldots.\,b_{n+m+p}}{[D(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-1})]^2}}{\dfrac{D(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-2})\,b_{n+m+p}}{D(a_{n+m+1};\, a_{n+m+p-1})}} + a_{n+m+p}\,\cdot_{\cdot}.$$

Das Gesetz, welches diesem Ausdrucke zum Grunde liegt, ist deutlich. Doch ist die Gleichung in dieser Form nicht gut brauchbar. Um sie für die Anwendung bequemer zu machen, löse man die Partialbrüche $K(a_1;\, a_{n-1})$, $K(a_{n+1};\, a_{n+m-1})$ u. s. w. im Zähler und Nenner nach (5. §. 7) auf, und schaffe die Ausdrücke $[D(a_1;\, a_{n-1})]^2$, $[D(a_{n+1};\, a_{n+m-1})]^2$ .... weg. Letzteres geschieht einerseits durch Ausscheiden, andererseits durch Multiplication. Wendet man Dies auf das erste Glied im Zähler und Nenner des ersten Bruchs und auf den Zähler des zweiten Bruchs in (7.) an, so werden dieselben in

$$\frac{1}{D(a_1;\, a_{n-1})}\Big[b_1 D(a_2;\, a_{n-1})(-1)^{n-1}\frac{b_1 b_2 b_3\,\ldots.\,b_n}{D a_1;\, a_{n-1})\,b_n + D(a_1;\, a_{n-1})\,a_n} + D(a_1;\, a_{n-1})\frac{b_{n+1}D(a_{n+2};\, a_{n+m-1})}{D(a_{n+1};\, a_{n+m-1})}(-1)^{m-1}\frac{D(a_1;\, a_{n-1})\,b_{n+1}\,\ldots.\,b_{n+m}}{[D(a_{n+1};\, a_{n+m-1})]^2}\,\cdot_{\cdot}\Big]$$

umgeformt. Nun ist nach (6. §. 7) $D(a_1;\, a_{n-1})a_n + D(a_1;\, a_{n-2})b_n = D(a_1,\, a_n)$. Führt man diesen Werth ein und multiplicirt Zähler und Nenner des ersten Bruchs und den Zähler des zweiten mit $D(a_{n+1};\, a_{n+m-1})$, so geht die Formel in

$$\frac{1}{D(a_1;\,a_{n-1})}\Big[b_1 D(a_2;\,a_{n-1})(-1)^{n-1}\frac{b_1 b_2 \ldots b_n D(a_{n+1};\,a_{n+m-1})}{D(a_1;\,a_n)D(a_{n+1};\,a_{n+m-1})}$$

$$+D(a_1;\,a_{n-1})b_{n+1}D(a_{n+2};\,a_{n+m-1})(-1)^{m-1}\frac{D(a_1;\,a_{n-1})b_{n+1}\ldots b_{n+m}}{D(a_{n+1};\,a_{n+m-1})}\Big]$$

über. Bedient man sich nun kürzerer Zeichen und setzt nach (§. 7.) $D(a_1, a_{n-1}) = N^1_{n-1}$; $b_1 D(a_2; a_{n-1}) = Z^1_{n-1}$; $D(a_{n+1}; a_{n+m-1}) = N^{n+1}_{n+m-1}$, u. s. w., so dafs die obern und und untern Zahlen der Z und N die Anfangs- und Schlufs-Elemente bezeichnen, woraus die Zähler und Nenner gebildet werden sollen, so gehen die beiden letzten Ausdrücke in

$$\frac{1}{N^1_{n-1}}\left[Z^1_{n-1}(-1)^{n-1}\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots N^{n+1}_{n+m-1}}{N^1_n . N^{n+1}_{n+m-1} + N^1_{n-1} Z^{n+1}_{n+m-1}(-1)^{m-1} N^1_{n-1} b_{n+1} . b_{n+2} \ldots b_{n+m}}\right]$$

und

$$(-1)^{m-1}\frac{N^1_{n-1} b_{n+1} \ldots b_{n+m} N^{n+m+1}_{n+m+p-1}}{N^{n+1}_{n+m} . N^{n+m+1}_{n+m+p-1} + N^{n+1}_{n+m-1} Z^{n+m+1}_{n+m+p-1}(-1)^{p-1} N^{n+1}_{n+m-1} b_{n+m+1} \ldots b_{n+m+p}}$$

u. s. w. über. Durch Substitution erhält man nun aus (7.):

(8.) $$K(b_1 : a_1, b_2 : a_2, \ldots b_{n+m+p} : a_{n+m+p} \ldots)$$

$$= \frac{1}{N^1_{n-1}}\Big[Z^1_{n-1}(-1)^{n-1}\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n N^{n+1}_{n+m-1}}{N^1_n . N^{n+1}_{n+m-1}}$$

$$+ N^1_{n-1} Z^{n+1}_{n+m-1}(-1)^{m-1}\frac{N^1_{n-1} b_{n+1} \ldots b_{n+m} . N^{n+m+1}_{n+m+p-1}}{N^{n+1}_{n+m} . N^{n+m+1}_{n+m+p-1}}$$

$$+ N^{n+1}_{n+m-1} Z^{n+m+1}_{n+m+p-1}(-1)^{p-1}\frac{N^{n+1}_{n+m-1} b_{n+m+1} \ldots b_{n+m+p} N^{n+m+p+1}_{n+m+p+q-1}}{N^{n+m+1}_{n+m+p} . N^{n+m+p+1}_{n+m+p+q-1}}$$

$$+ N^{n+m+1}_{n+m+p-1} . Z^{n+m+p+1}_{n+m+p+q-1} \ldots\Big].$$

Diese Formel läfst sich noch auf folgende Weise ausdrücken:

(9.) $$K(b_1 : a_1, b_2 : a_2 \ldots b_{n+m+p} : a_{n+m+p} \ldots)$$

$$= \frac{1}{N_{n-1}}\Bigg[Z^1_{n-1}(-1)^{n-1}\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}{N^1_n}$$

$$+ \frac{N^1_{n-1}}{N_{n+m-1}}\Bigg[Z^{n+1}_{n+m-1}(-1)^{m-1}\frac{b_{n+1} b_{n+2} \ldots b_{n+m}}{N^{n+1}_{n+m}}$$

$$+ \frac{N^{n+1}_{n+m-1}}{N_{n+m+p-1}}\Big[Z^{n+m+1}_{n+m+p-1}(-1)^{p-1}\frac{b_{n+m+1} \ldots b_{n+m+p}}{N^{n+m+1}_{n+m+p}}$$

$$+ \frac{N^{n+m+1}_{n+m+p-1}}{N^{n+m+p+1}_{n+m+p+q-1}}\Big[Z^{n+m+p+1}_{n+m+p+q-1}(-1)^{q-1} \ldots\Big]\Big]\Bigg]\Bigg].$$

University of Michigan

Die Formel wird einfacher, wenn man $n = m = p = q \ldots$ setzt. Sie giebt dann

$$(10.)\quad K(b_1 : a_1, b_2 : a_2 \ldots) = \frac{1}{N^1_{n-1}}\left[Z^1_{n-1}(-1)^{n-1}\frac{b_1 b_2 \ldots b_n N^{n+1}_{2n-1}}{N^1_n . N^{n+1}_{2n-1}} + N^1_{n-1} Z^{n+1}_{2n-1}(-1)^{n-1}\frac{N^1_{n-1} b_{n+1} \ldots b_{2n} N^{2n+1}_{2n-1}}{N^{n+1}_{2n} . N^{2n+1}_{3n-1}} + N^{n+1}_{2n-1} Z^{2n+1}_{3n-1}(-1)^{n-1} \ldots\right].$$

Noch einfacher wird sie, wenn man sie auf *periodische* Kettenbrüche anwendet. Die Zähler und Nenner der 1ten, 2ten, 3ten Periode u. s. w. sind dann, isolirt betrachtet, einander gleich, und es ergiebt sich aus (9.):

$$(11.)\quad K(b_1 : a_1, b_n : a_n, b_1 : a_1, b_n : a_n \ldots) = \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}(-1)^{n-1}\cfrac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}{N_n + Z_{n-1}(-1)^{n-1}\cfrac{b_1 b_2 \ldots b_n}{N_n + Z_{n-1}(-1)^{n-1}\cfrac{b_1 b_2 \ldots b_n}{N_n + Z_{n-1}(-1)^{n-1} \ldots}}}\right].$$

Z_{n-1}, N_{n-1}, N_n beziehen sich auf die erste Periode. Hat die Periode eine *gerade* Elementenzahl, so sind die Glieder des Kettenbruchs (11.) durch das *negative* Zeichen, hat sie eine ungerade Elementenzahl, durch das *positive* Zeichen verbunden.

Wieder einfacher werden die Ausdrücke, wenn man sie auf Kettenbrüche von der ersten Form (1. §. 1) anwendet. Es ist dann aus (8. und 11.):

$$(12.)\quad K(a_1, a_2, \ldots a_{n+m+p}, \ldots) = \frac{1}{N^1_{n-1}}\left[Z^1_{n-1}(-1)^{n-1}\frac{N^{n+1}_{n+m-1}}{N^1_n N^{n+1}_{n+m-1}} + N^1_{n-1} Z^{n+1}_{n+m-1}(-1)^{m-1}\frac{N^1_{n-1} N^{n+m+1}_{n+m+p-1}}{N^{n+1}_{n+m} N^{n+m+1}_{n+m+p-1}} + N^{n+1}_{n+m-1} Z^{n+m+1}_{n+m+p-1}(-1)^{p-1} \ldots\right],$$

$$(13.)\quad K(a_1, a_1, \ldots a_n, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots) = \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1}(-1)^{n-1}\cfrac{1}{N_n + Z_{n-1}(-1)^{n-1}\cfrac{1}{N_n + Z_{n-1}(-1)^{n-1}\cfrac{1}{N_n + Z_{n-1}(-1)^{n-1} \ldots}}}\right].$$

Das erste Glied in (13.) giebt den Werth des $(n-1)$ten Partialbruchs des nicht reducirten Kettenbruchs, die zwei ersten Glieder geben den Werth von $(2n-1)$ Gliedern, u. s. f.; die r ersten Glieder geben den Werth von $(rn-1)$ Gliedern (nicht von rn Gliedern) des nicht reducirten Kettenbruchs.

Wendet man die Gleichung (12. §. 4) auf (13.) an und unterscheidet zwischen einem geraden und einem ungeraden n, so ist für ein *gerades n:*

$$(14.) \quad K(a_1, a_2, \ldots a_n, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots.)$$
$$= \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} - \frac{(N_n+Z_{n-1})^{r-1} - (r-2)(N_n+Z_{n-1})^{r-3} + (r-3)_2 (N_n+Z_{n-1})^{r-5} - \ldots}{(N_n+Z_{n-1})^{r} - (r-1)(N_n+Z_{n-1})^{r-2} + (r-2)_2 (N_n+Z_{n-1})^{r-4} - \ldots}\right],$$

und für ein *ungerades n:*

$$(15.) \quad K(a_1, a_2, \ldots a_n, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$$
$$= \frac{1}{N_{n-1}}\left[Z_{n-1} + \frac{(N_n+Z_{n-1})^{r-1} + (r-2)(N_n+Z_{n-1})^{r-3} + (r-3)_2 (N_n+Z_{n-1})^{r-5} + \ldots}{(N_n+Z_{n-1})^{r} + (r-1)(N_n+Z_{n-1})^{r-2} + (r-2)_2 (N_n+Z_{n-1})^{r-5} + \ldots}\right].$$

Der Zeichenwechsel in (14.) rechtfertigt sich leicht. Man entwickele nämlich nach (§. 2, 3 und 4) die Partialbrüche des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a}}}}},$$

so wird sich die Richtigkeit der Formel zeigen. Auch kann man von der Gleichung (15. §. 8) ausgehen, nach welcher

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cfrac{1}{a_4}}}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{-a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{-a_4}}}} \ldots.$$

ist, und die entwickelten Ausdrücke der D nach (§. 3 u. 4) untersuchen. Auch dann wird sich der Zeichenwechsel einfach erklären, da die Elemente mit *geraden* Stellenzahlen negative Zeichen haben. Werden die Elemente sämmtlich *einander gleich* gesetzt, so erhält man:

$$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a}}} \ldots = K_n(a, -a, a-a, \ldots) = +\frac{a^{n-1} - (n-2)a^{n-3} + (n-3)_2 a^{n-5} \ldots}{a^n - (n-1)a^{n-2} + (n-2)_2 a^{n-4} \ldots}.$$

Werden jetzt in den Gleichungen (14. und 15.) die Zahlenwerthe für die angedeuteten Zähler und Nenner eingeführt, so leisten sie ihre Dienste für die Werthberechnung der Partialbrüche der nicht reducirten Kettenbrüche; denn die $r$te Potenz in (14. und 15.) giebt den Werth des $((r+1)n-1)$ten Partialbruchs durch den ursprünglichen. Nur wenige, mit den bisher entwickelten Mitteln sehr einfach zu berechnenden Glieder reichen zu einer recht genauen Werthbestimmung eines Kettenbruchs hin.

Dies wird sich durch Folgendes zeigen. Es ist z. B. nach (§. 2.):

$$\sqrt{21} = 4 + K(1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8 \ldots) \text{ und } n = 6,$$

$N_5 = 12$, $N_6 = 103$, $Z_5 = 7$. Für $r = 1$ und $r = 2$ ist aus (14.):

$$\sqrt{21} = 4 + \frac{1}{12}\left(7 - \frac{1}{110}\right) = 4 + \frac{769}{1320},$$

$$\sqrt{21} = 4 + \frac{1}{12}\left(7 - \frac{110}{110^2 - 1}\right) = 4 + \frac{1}{12}\left(7 - \frac{110}{12099}\right) = 4 + \frac{84583}{145188}.$$

Es findet sich also der 11te und 17te Partialbruch des ursprünglichen Kettenbruchs durch eine kurze Rechnung; wie aus den Resultaten in (§. 2) zu ersehen ist.

Die Gleichungen (9—15.) lassen sich auch eben so leicht auf *periodische* Kettenbrüche von einem oder von zwei Elementen anwenden. Die Werthe der Z_{n-1}, N_{n-1}, N_n lassen sich dann nach (12. u. ff. §. 4) finden; wodurch die Rechnung noch mehr erleichtert wird. Ist z. B.

$$\sqrt{2} = 1 + K(2, 2, 2, \ldots)$$

gegeben und setzt man $n = 5$, so ist nach (12. §. 4)

$$Z_4 = 2^3 + 2.2 = 12; \quad N_4 = 2^4 + 3.2^2 + 1 = 29 \text{ und}$$
$$N_5 = 2^5 + 4.2^3 + 3.2 = 70, \quad N_5 + Z_4 = 82,$$

und man erhält aus (15.):

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{29}\left(12 + \frac{82^{r-1} + (r-2)82^{r-3} + (r-3)_2\, 82^{r-5} \ldots}{82^r + (r-1)82^{r-2} + (r-2)_2\, 82^{r-4} \ldots}\right).$$

Für $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ ergiebt sich:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{12}{29} = 1 + \frac{1}{29}\left(12 + \frac{1}{82}\right) = 1 + \frac{985}{2378}$$
$$= 1 + \frac{1}{29}\left(12 + \frac{82}{82^2 + 1}\right) = 1 + \frac{80782}{195025} = 1{,}4142135623 \ldots.$$

Die zwei ersten Glieder des reducirten Bruchs geben 9, die drei ersten 14 Glieder des ursprünglichen Kettenbruchs und den Werth bis auf 10 Decimalstellen richtig.

Dafs die vorstehenden Gleichungen (14. und 15.) ***zusammen*** bestehen, bestätigt sich, wenn man sie zur Werthbestimmung eines und desselben Partialbruchs, z. B. für $\sqrt{2}$ benutzt, und hierzu den 11ten Bruch nimmt. Setzt man $n=3$ und $r=3$, also $Z_2=2$, $N_2=5$, $N_3=12$ und $N_3+Z_2=14$, so ist aus (15.)

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{5}\left[2+\frac{14^2+1}{14^3+2.14}\right]=1+\frac{1}{5}\left[2+\frac{197}{2772}\right]=1+\frac{5741}{13860}.$$

Setzt man $n=4$ und $r=2$, also $Z_3=5$, $N_3=12$, $N_n=29$, so ist aus (14.):

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{12}\left[5-\frac{34}{34^2-1}\right]=1+\frac{1}{12}\left[5-\frac{34}{1155}\right]=1+\frac{5741}{13860}=1{,}414213564\ldots,$$

welches bis auf die achte Decimalstelle richtig ist.

§. 10.

Die ***zweiten Wurzeln*** aus Zahlen lassen sich bekanntlich durch periodische Kettenbrüche ausdrücken. Die Perioden, welche dabei entstehen, lassen sich aber nicht vorausbestimmen. So führt $\sqrt{21}$ auf eine Periode mit sechs Elementen, wie wir oben sahen, $\sqrt{28}$ auf eine mit 4 Elementen (3, 2, 3, 10) u. s. w. Es läfst sich aber zeigen, dafs alle Wurzel-Ausdrücke, welche Perioden von nur *einem,* höchstens *zwei* Elementen haben, auf Kettenbrüche führen. Dadurch wird es möglich, alle diese Ausdrücke auf bestimmte und geschlossene Formen zu bringen.

Man setze nämlich

$$\sqrt{A}=\sqrt{(m^2+p)},$$

wo m^2 die nächst niedrige Quadratzahl gegen A, $p<2m+1$ ist, und m und p ganze Zahlen bedeuten. Der fragliche Kettenbruch findet sich dann leicht, wenn man $\sqrt{A}$ zuerst mit der Einheit theilt, den hieraus sich ergebenden Quotienten und Rest sucht, mit dem erhaltenen Rest in den vorigen Divisor dividirt, und dies so weit fortsetzt, bis der Zweck erreicht ist. Es ist

$$\frac{\sqrt{(m^2+p)}}{1}=m,$$

und der Rest ist $\sqrt{(m^2+p)}-m$. Nun ist weiter

$$\frac{1}{\sqrt{(m^2+p)}-m}=\frac{1.\sqrt{(m^2+p)}+m}{p}=\frac{2m}{p};$$

der Rest ist $\sqrt{(m^2+p)}-m$. Wird mit ihm in den vorigen Divisor (p) dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{p}{\sqrt{(m^2+p)}-m}=\frac{p[\sqrt{(m^2+p)}+m]}{p}=2m.$$

Von hier an wiederholen sich die gefundenen zwei Quotienten und man erhält:

$$(1.)\quad \sqrt{(m^2+p)} = m+\cfrac{1}{\cfrac{2m}{p}+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{\cfrac{2m}{p}+\cdots}}} = m+K\left(\frac{2m}{p},\ 2m,\ \frac{2m}{p},\ 2m,\ \ldots.\right).$$

Ist $p=1$, so ist

$$(2.)\quad \sqrt{(m^2+1)} = m+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{2m}+\cdots} = m+K(2m,\ 2m,\ 2m,\ \ldots.),$$

und die obige Behauptung ist gerechtfertigt.

Um den Ausdruck $\sqrt{(m^2-p)}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, dient das gleiche Verfahren und man erhält:

$$(3.)\quad \sqrt{(m^2-p)} = m+\cfrac{1}{\cfrac{2m}{-p}+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{\cfrac{2m}{-p}+\cdots}}} = m+K\left(\frac{2m}{-p},\ 2m,\ \frac{2m}{-p},\ 2m,\ \ldots\right)$$

$$= m-K\left(\frac{2m}{p},\ -2m,\ \frac{2m}{p},\ -2m,\ \ldots.\right).$$

Ist $p=1$, so wird

$$(4.)\quad \sqrt{(m^2-1)} = m+\cfrac{1}{-2m+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{-2m}\cdots}} = m+K(-2m,2m,-2m,2m,\ldots)$$

$$= m-\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{-2m+\cfrac{1}{2m}\cdots}} = m-K(2m,\ -2m,\ 2m,\ -2m,\ \ldots.).$$

Wendet man nun auf diese Formeln die oben gefundenen Gesetze an, so erhält man:

$$(5.)\quad \sqrt{(m^2+p)} = m+\frac{p\left[(2m)^{n-1}+(n-2)(2m)^{n-3}p+(n-3)_2(2m)^{n-5}p^2+\ldots.\right]}{(2m)^n+(n-1)(2m)^{n-2}p+(n-2)_2(2m)^{n-4}p^2+\ldots.},$$

$$(6.)\quad \sqrt{(m^2-p)} = m-\frac{p\left[(2m)^{n-1}-(n-2)(2m)^{n-3}p+(n-3)_2(2m)^{n-5}p^2-\ldots.\right]}{(2m)^n-(n-1)(2m)^{n-2}p+(n-2)_2(2m)^{n-4}p^2-\ldots.},$$

$$(7.)\quad \sqrt{(m^2+1)} = m+\frac{(2m)^{n-1}+(n-2)(2m)^{n-3}+(n-3)_2(2m)^{n-5}+\ldots.}{(2m)^n+(n-1)(2m)^{n-2}+(n-2)_2(2m)^{n-4}+\ldots.},$$

$$(8.)\quad \sqrt{(m^2-1)} = m-\frac{(2m)^{n-1}-(n-2)(2m)^{n-3}+(n-3)_2(2m)^{n-5}-\ldots.}{(2m)^n-(n-1)(2m)^{n-2}+(n-2)_2(2m)^{n-4}-\ldots.}.$$

So sind also die Ausdrücke auf bestimmte, allgemein gültige Gesetze zurückgebracht. n ist positiv und *willkürlich* anzunehmen.

Aus (§. 6.) ergeben sich die Unterschiede zweier benachbarten Partialbrüche. Es ist

$$(9.)\quad \frac{Z_{2n}}{N_{2n}} - \frac{Z_{2n-1}}{N_{2n-1}} = K_{2n}\left(\frac{2m}{p}, 2m, \ldots\right) - K_{2n-1}\left(\frac{2m}{p}, 2m, \ldots\right) = -\frac{p^{2n}}{N_{2n-1}N_{2n}},$$

$$(10.)\quad \frac{Z_{2n+1}}{N_{2n+1}} - \frac{Z_{2n}}{N_{2n}} = K_{2n+1}\left(\frac{2m}{p}, 2m, \ldots\right) - K_{2n}\left(\frac{2m}{p}, 2m, \ldots\right) = \frac{p^{2n+1}}{N_{2n}N_{2n+1}}.$$

Hieraus findet sich Folgendes: Der Werth eines Partialbruchs von *gerader* Ordnung ist *kleiner*, der eines Partialbruchs von *ungerader* Ordnung *gröfser* als der Werth der darzustellenden Wurzel. Ferner ist für die Unterschiede der Partialbrüche von der Form (6.):

$$(11.)\quad \frac{Z_{2n}}{N_{2n}} - \frac{Z_{2n-1}}{N_{2n-1}} = K_{2n}\left(\frac{2m}{-p}, 2m, \ldots\right) - K_{2n-1}\left(\frac{2m}{-p}, 2m, \ldots\right) = -\frac{p^{2n}}{N_{2n-1}N_{2n}},$$

$$(12.)\quad \frac{Z_{2n+1}}{N_{2n+1}} - \frac{Z_{2n}}{N_{2n}} = K_{2n+1}\left(\frac{2m}{-p}, 2m, \ldots\right) - K_{2n}\left(\frac{2m}{-p}, 2m, \ldots\right) = -\frac{p^{2n+1}}{N_{2n}N_{2n+1}}.$$

Hieraus folgt das Gesetz für die Partialbrüche von der Form (6.); nämlich, dafs jeder nachfolgende Partialbruch *kleiner* ist als der vorhergehende, dafs also die Werthe sämmtlicher Partialbrüche nicht um den Wurzelwerth schwanken, sondern gröfser sind als derselbe und sich ihm immer mehr nähern. Sie verhalten sich zum Wurzelwerthe, wie eine *Asymptote zur Curve.*

Die hier entwickelten Formeln leisten bei der Darstellung der Wurzeln gute Dienste, denn sie beruhen auf einem *unabhängigen* Bildungsgesetz. Namentlich lassen sie sich sehr gut gebrauchen, wenn $\frac{2m}{p}$ eine ganze Zahl, oder p im Verhältnisse zu m eine kleine Zahl bedeutet. Jedenfalls haben sie Vorzüge vor der bekannten Methode; denn sie machen die Rechnung, welche zu der Entwicklung eines Wurzel-Ausdrucks in einen Kettenbruch nach der gewöhnlichen Methode nöthig sind, überflüssig. Auch convergiren die durch sie gebildeten Partialbrüche schneller, als die durch die gewöhnliche Methode gefundenen. Zudem kann man noch die in (14. und 15. §. 9) erhaltenen Resultate, wie leicht zu sehen, mit Vortheil auf sie anwenden, da sich zwei oder mehrere Paare von Gliedern in eines zusammenfassen lassen.

Um Dies zu zeigen, wollen wir den Fall $\sqrt{21}$ nehmen; obgleich dieser Fall nur wenig die Vortheile der Methode darthut. Es ist aus (5.):

$$\sqrt{21} = \sqrt{(4^2+5)} = 4 + K\left(\frac{8}{5},\ 8,\ \frac{8}{5},\ 8,\ \ldots\right) = 4{,}58257569\ \ldots$$

$$= 4 + \frac{5[8^{n-1} + (n-2)8^{n-3}.5 + (n-3)_2\, 8^{n-5}.5^2 \ldots]}{8^n + (n-1)8^{n-2}.5 + (n-2)_2\, 8^{n-4}5^2 + \cdots}.$$

Werden hierin allmälig die Werthe 1, 2, 3, ... statt n gesetzt, so erhält man für die einzelnen Partialbrüche (P_1, P_2, P_3, ...) folgende Werthbestimmungen:

$$P_1 = 4 + \frac{5}{8} = 4{,}62 > \sqrt{21},$$

$$P_2 = 4 + \frac{40}{69} = 4{,}579 < \sqrt{21},$$

$$P_3 = 4 + \frac{345}{592} = 4{,}58277 > \sqrt{21},$$

$$P_4 = 4 + \frac{2960}{5081} = 4{,}582562 < \sqrt{21},$$

$$P_5 = 4 + \frac{25405}{43608} = 4{,}582576 > \sqrt{21},$$

u. s. w. Aus (6.) ist

$$\sqrt{21} = \sqrt{(25-4)} = 5 + K\left(\frac{10}{-4},\ 10,\ \frac{10}{-4},\ 10,\ \ldots\right)$$

$$= 5 - \frac{4[10^{n-1} - (n-2)10^{n-3}.4 + (n-3)_2\, 10^{n-5}.4^2 - \cdots]}{10^n - (n-1)10^{n-2}.4 + (n-2)_2\, 10^{n-4}.4^2 - \cdots},$$

woraus sich die Partialbrüche wie folgt entwickeln:

$$P_1 = 5 - \frac{4}{10} = 4{,}6 > \sqrt{21},$$

$$P_2 = 5 - \frac{5}{12} = 4\frac{7}{12} = 4{,}583\ldots > \sqrt{21},$$

$$P_3 = 5 - \frac{96}{230} = 4\frac{134}{230} = 4{,}582608 > \sqrt{21},$$

$$P_4 = 5 - \frac{551}{1320} = 4\frac{769}{1320} = 4{,}58257575 = \sqrt{21} = P_5,$$

$$P_6 = 5 - \frac{5280}{12649} = 4\frac{7369}{12649} = 4{,}582575697 > \sqrt{21},$$

u. s. w. Der 1te, 2te, 3te, 4te, ... $n$te Partialbruch fällt hier mit dem 3ten, 5ten, 7ten, ... $(2n+1)$ten nach der gewöhnlichen Methode (§. 2.) zusammen. Die in der obigen Formel gehen mit den zwischenliegenden parallel.

Aus (6.) ist

$$\sqrt{23} = \sqrt{(5^2-2)} = 5 - \frac{2[10^5 - 4.10^3.2 + 3.10.4]}{10^6 - 5.10^4.2 + 6.10^2.4 - 8} = 5 - \frac{23030}{112799}$$

$$= 4 + \frac{89769}{112799} = 4{,}79583152332\ldots > \sqrt{21}.$$

Der gefundene Werth ist auf 10 Decimalstellen richtig.

§. 11.

Es lassen sich auch die obigen Resultate gut zur Berechnung der reellen Wurzeln der Gleichungen vom zweiten Grade benutzen. Für die Gleichung

$$x^2 + mx = p$$

und ihre Wurzeln

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{2}m^2 + p)} \quad \text{und} \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}m - \sqrt{(\tfrac{1}{2}m^2 + p)}$$

erhält man aus (§. 10.):

$$(1.)\ x_1 = \boldsymbol{K}\left(\frac{m}{p}, m, \frac{m}{p}, m, \ldots\right) = \frac{p(m^{n-1} + (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 + \cdots}{m^n + (n-1)m^{n-2}p + (n-2)_2 m^{n-4}p^2 + \cdots},$$

$$(2.)\ x_2 = -m - \boldsymbol{K}\left(\frac{m}{p}, m, \ldots\right) = -m - \frac{p[m^{n-1} + (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 + \cdots]}{m^n + (n-1)m^{n-2}p + (n-2)_2 m^{n-4}p^2 + \cdots}.$$

Für $x^2 + mx = -p$ ist

$$(3.)\quad x_1 = \boldsymbol{K}\left(\frac{m}{-p}, m, \ldots\right)$$

$$= -\frac{p[m^{n-1} - (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 - \cdots]}{m^n - (n-1)m^{n-2}p + (n-2)_2 m^{n-4}p^2 - \cdots},$$

$$(4.)\quad x_2 = -m - \boldsymbol{K}\left(\frac{m}{-p}, m, \ldots\right)$$

$$= -m + \frac{p[m^{n-1} - (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 - \cdots]}{m^n - (n-1)m^{n-1} + (n-2)_2 m^{n-4}p^2 - \cdots}.$$

Für $x^2 - mx = +p$ ist

$$(5.)\quad x_1 = m + \frac{p[m^{n-1} + (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 \ldots]}{m^n + (n-1)m^{n-2}p + (n-2)_2 m^{n-4}p^2 \ldots},$$

$$(6.)\quad x_2 = -\frac{p[m^{n-1} + (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 \ldots]}{m^n + (n-1)m^{n-2}p + (n-2)m^{n-4}p^2 \ldots}.$$

Für $x^2 - mx = -p$ ist

$$(7.)\quad x_1 = m - \frac{p[m^{n-1} - (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 - \cdots]}{m^n - (n-1)m^{n-2}p + (n-2)_2 m^{n-4}p^2 - \cdots},$$

$$(8.)\quad x_2 = +\frac{p[m^{n-1} - (n-2)m^{n-3}p + (n-3)_2 m^{n-5}p^2 - \cdots]}{m^n - (n-1)m^{n-2}p + (n-2)_2 m^{n-4}p^2 - \cdots}.$$

Die Ausdrücke fördern sehr rasch, wenn $\frac{1}{2}m$ gegen p eine nicht unbedeutende Zahl ist. Durch einige Glieder wird der Werth von x_1 und x_2 ziemlich genau gefunden. So lange $p < m+1$ ist, werden die Gleichungen gute Dienste leisten. Ist aber p gröfser, so kann man

$$(9.) \qquad \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 \pm p)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 \pm 4p)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(s^2+r)}$$

setzen, wo s und r ganze Zahlen sind und $r < 2m+1$ ist. Dann ergiebt sich aus $x = \frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{(s^2+r)})$:

$$(10.) \qquad x_1 = \tfrac{1}{2}(-m+s) + \tfrac{1}{2}\frac{r[(2s)^{n-1}+(n-2)(2s)^{n-3}r+(n-3)_2(2s)^{n-5}r\ldots]}{(2s)^n+(n-1)(2s)^{n-2}r+(n-2)_2(2s)^{n-4}r^2+\cdots},$$

$$(11.) \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}(-m+s) - \tfrac{1}{2}\frac{r[(2s)^{n-1}+(n-2)(2s)^{n-3}r+(n-3)(2s)^{n-5}r\ldots]}{(2s)^n+(n-1)(2s)^{n-2}r+(n-2)(2s)^{n-4}r^2+\ldots}.$$

Zur Entwicklung der Gleichung $x^2+mp=p$ kann man auch folgender Methode sich bedienen.

$$x = \frac{p}{m+x}$$

giebt durch wiederholte Substitution

$$x = \cfrac{p}{m+\cfrac{p}{m+\cfrac{p}{m}\cdots}} = K(p:m, p:m, \ldots).$$

Daraus findet sich zur Werthbestimmung der einen Wurzel:

$$(12.) \qquad x_1 = \frac{p[m^{n-1}+(n-2)m^{n-3}p+(n-3)_2 m^{n-5}p^2\ldots]}{m^n+(n-1)m^{n-2}p+(n-2)_2 m^{n-4}p^2+\cdots}.$$

Für die zweite Wurzel giebt ein einfacher Calcul die nämliche Formel wie in (2.). Die Entwicklung der Formen von $x^2-mx=p$ und $x^2 \pm mx = -p$ führen, wie sich versteht, auf die frühern Darstellungen zurück, wenn man sie nach dieser Methode behandelt. Die Formel (7.) läfst sich um so zweckmäfsiger benutzen, je gröfser m im Verhältnifs zu p ist.

Für die Gleichung

$$x^2+20x = 2$$

z. B. hat man aus (1. oder 7.):

$$x_1 = \frac{2}{20} = 0{,}1,$$

$$x_1 = \frac{2.20}{20^2+2} = \frac{20}{201} = 0{,}0995024\ldots,$$

$$x_1 = \frac{2(20^2+2)}{20^2+2.20.2} = \frac{201}{2020} = 0{,}09950495\ldots,$$

$$x_1 = \frac{2(20^3+2.20.2)}{20^4+2.20^2.2+2^2} = \frac{4040}{40601} = 0{,}0995049383 \ldots$$

Der 2te, 3te und 4te Bruch giebt die Wurzel auf 5, 7, 10 Decimalstellen richtig. Der Werth der zweiten Wurzel ist nach (2.):

$$x_2 = -20{,}0995049 \ldots.$$

Die Gleichung

$$x^2 - 20x = -2$$

hat folgende Wurzeln:

$$x_1 = \frac{2(20^5-4.20^3+3.20.2)}{20^6-5.20^4.2+6.20.4-8} = \frac{784060}{7801199} = 0{,}100505063388 \ldots,$$

$$x = 20 - \frac{784060}{7801199} = 19{,}89949493661 \ldots,$$

deren Werthe auf 11 Decimalstellen richtig sind.

Für die Gleichung

$$x^2 + 8x = 10$$

finden die Ausdrücke (5. und 6.) ihre Anwendung. Hier ist aus

$$m^2 + 4p = 64 + 40 = 100 + 4 \quad \text{und} \quad s = 10,\ r = 4:$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(-8+10) + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{4[20^3+2.20.4]}{20^4+3.20^2.4+16} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2040}{10301}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}.0{,}198039027 = 1{,}099019513 \ldots,$$

$$x_2 = -9{,}099019513 \ldots$$

Diese Wurzeln sind bis auf 9 Decimalstellen richtig.

Man sieht, wie practisch die mitgetheilten Methoden sind; denn die Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade geschieht durch eine einfache Division.

Abgesehen von (m) in den Formeln (1, etc.), ergiebt sich,

(13.) Dafs sich die zwei Wurzeln einer quadratischen Gleichung durch *einen und denselben* periodischen Kettenbruch darstellen lassen. Nach *Galois* und *Möbius* (6ter Band d. Journ. S. 234) sind zwei periodische Kettenbrüche dazu nöthig.

§. 12.

Auch zur Auflösung der *unbestimmten* Gleichungen mit zwei Unbekannten, oder derer, die sich darauf zurückbringen lassen, können die obigen Resultate gut benutzt werden.

Ist z. B.:

$$(1.) \qquad N = Ax + D = By + E,$$

unter der Bedingung, dafs $D < A$, $E < B$, $A < B$ und sämmtlich ganze positive Zahlen, auch A und B relative Primzahlen zu einander sind, so hat man

$$(2.) \qquad Ax = By + E - D = By + C.$$

Dies giebt durch Division:

$$x = \frac{By + C}{A} = a_1 y + \frac{b_1 y + C}{A} = a_1 y + r.$$

Hier bedeutet a_1 den Quotienten aus $\frac{B}{A}$, und b_1 den Rest. Behandelt man nun auf die nämliche Weise

$$\frac{b_1 y + C}{A} = r,$$

so erhält man

$$y = a_2 r + \frac{b_2 r - C}{b_1} = a_2 r + s.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man endlich, da A und B relative Primzahlen sind, auf die *Einheit* als Divisor; wodurch die Rechnung geschlossen ist. Gesetzt, dies sei im vorliegenden Falle mit dem fünften Quotienten (a_5) der Fall, so ist

$$(3.) \quad \begin{cases} x = a_1 y + r, \\ y = a_2 r + s, \\ r = a_3 s + t, \\ s = a_4 t + u, \\ t = a_5 u + C. \end{cases}$$

Substituirt man nun die spätern Werthe in die frühern in (5.), so ergiebt sich:

$$y = (a_2 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_5 + a_4 a_5 + a_2 a_3 + 1)u + (a_2 a_3 a_4 + a_4 + a_2)C$$

$$x = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_5 + a_1)u + (a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + a_1 a_2 + 1)C;$$

und hieraus, in Bezug auf die in (§. 2 und 3) aufgestellten Gesetze:

$$(4.) \quad \begin{cases} y = D(a_2, a_3, a_4, a_5)\, u + D(a_2, a_3, a_4)\, C, \\ x = D(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\, u + D(a_1, a_2, a_3, a_4)\, C. \end{cases}$$

So ist in diesem Falle die Gleichung (2.) gelöset. Ist man bei Aufsuchung der Quotienten bis zu a_6 vorgeschritten, welches

$$(5.)\quad \begin{cases} x = a_1 y + r, \\ y = a_2 r + s, \\ r = a_3 s + t, \\ s = a_4 t + u, \\ t = a_5 u + v, \\ u = a_6 v + C \end{cases}$$

giebt, so erhält man auf gleiche Weise durch Substitution die Auflösungen

$$(6.)\quad \begin{cases} y = D(a_2, a_6) v - D(a_2, a_5) C, \\ x = D(a_1, a_6) v - D(a_1, a_5) C. \end{cases}$$

Diese Entwicklungs-Art ist, wie leicht zu sehen, allgemein und giebt für die Quotienten $a_1, a_2, \ldots a_n$:

$$(7.)\quad \begin{cases} y = D(a_2, a_n) u (-1)^{n-1} D(a_2, a_{n-1}) C, \\ x = D(a_1, a_n) u (-1)^{n-1} D(a_1, a_{n-1}) C. \end{cases}$$

Erinnert man sich nun, dafs nach den bisherigen Voraussetzungen

$$(8.)\quad \frac{A}{B} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \ddots}}} = K(a_1, a_2, \ldots a_n) = \frac{D(a_2, a_n)}{D(a_1, a_n)},$$

also $A = D(a_2, a_n)$, $B = D(a_1, a_n)$, $Z_{n-1} = D(a_2, a_{n-1})$, $N_{n-1} = D(a_1, a_{n-1})$ ist, so erhält man:

$$(9.)\quad \begin{cases} y = Au(-1)^{n-1} D(a_2, a_{n-1}) C = Au(-1)^{n-1} Z_{n-1} C, \\ x = Au(-1)^{n-1} D(a_1, a_{n-1}) C = Bu(-1)^{n-1} N_{n-1} C. \end{cases}$$

Es läfst sich sofort x und y durch Partialbrüche des Kettenbruchs $\frac{A}{B}$ finden. Für die Gleichung (1.) ergeben sich also folgende zwei Auflösungen:

$$(10.)\quad N = ABu(-1)^{n-1} AD(a_1, a_{n-1})(E - D) + D,$$
$$(11.)\quad N = ABu(-1)^{n-1} BD(a_2, a_{n-1})(E - D) + E.$$

Der Werth von u ist *veränderlich*. Die hier gegebenen Gleichungen lassen sich in der Form

$$Ax \equiv \pm C, \text{ Mod. } B,$$

darstellen. Die Gleichung (11.) hat die bequemere Form. Sie giebt folgende speciellen Fälle:

Für die Quotienten a_1, a_2:

$$N = ABu - B(E-D) + E.$$

Für die Quotienten a_1, a_2, a_3:

$$N = ABu + Ba_2(E-D) + E.$$

Für a_1, a_2, a_3, a_4:

$$N = ABu - B(a_2a_3+1)(E-D) + E.$$

Für a_1, a_2, a_3, a_4, a_5:

$$N = ABu + B(a_2a_3a_4 + a_2 + a_4)(E-D) + E.$$

Für a_1, a_2, ... a_6:

$$N = ABu - B(a_2a_3a_4a_5 + a_2a_3 + a_2a_5 + a_4a_5 + 1)(E-D) + E.$$

Für a_1, a_2, a_3 ... a_7:

$$N = ABu + B(a_2a_3a_4a_5a_6 + a_2a_3a_4 + a_2a_3a_6 + a_4 + a_2a_5a_6 + a_6 + a_4a_5a_6)(E-D) + E$$

u. s. w.

Werden z. B. die Zahlen gesucht, welche durch 55 dividirt, den Rest 4 und durch 89 dividirt, den Rest 41 lassen, so ist

$$N = 55x + 4 = 89y + 41$$

und man hat

$$\frac{55}{89} = K_{10}(1, 1, 1 \ldots).$$

Ferner ist nach (§. 2 und 3) $N_9 = 55$, $Z_9 = 34$, $A = 55$, $B = 89$, $D = 4$, $E = 41$, $n = 10$. Aus (10. und 11.) erhält man

$$N = 55.89u - 55.55.37 + 4 = 4895u - 111921$$
$$= 55.89u - 89.34.37 + 41 = 4895u - 111921.$$

Die einfachste Form hierfür ist

$$(12.) \quad N = 4895u + 664.$$

Für $55x = 89x + 1$ erhält man

$$N = 55.89u - 55.55 = 55.89u - 89.34 + 1 = 4895u - 3025,$$

und hieraus

$$(13.) \quad N = 4895u + 1870.$$

§. 13.

Die Gleichung

$$(1.) \quad Ax + D + By + E = F$$

läfst sich auf dieselbe Weise behandeln. Sie giebt

$$(2.) \quad Ax + By = F - D - E = C,$$

oder

$$(3.) \quad Ax = -By + C.$$

Wird nun $\frac{A}{-B}$ auf die im vorigen Paragraph angedeutete Weise entwickelt, so erhält man

$$(4.) \quad \frac{A}{-B} = K(-a_1, -a_2, \ldots -a_n)$$

und folgende entwickelte Ausdrücke:

$$(5.) \quad y = D(-a_2, -a_n)u + D(-a_2, -a_{n-1})C,$$

$$(6.) \quad x = D(-a_1, -a_n)u + D(-a_1, -a_{n-1})C.$$

Die Anzahl der Elemente in diesen Ausdrücken entscheidet über die Zeichen und es wird

$$(7.) \quad y = (-1)^{n-1} D(a_2, a_n)u(-1)^{n-2} D(a_2, a_{n-1})C = (-1)^{n-1} Au(-1)^{n-2} Z_{n-1} C$$
$$= (-1)^{n-1} Au(-1)^{n-2} D(a_2, a_{n-1})C,$$

$$(8.) \quad x = (-1)^{n} D(a_1, a_n)u(-1)^{n-1} D(a_1, a_{n-1})C = (-1)^{n} Bu(-1)^{n-1} N_{n-1} C$$
$$= (-1)^{n} Bu(-1)^{n-1} D(a_1, a_{n-1})C.$$

Hier ist $C = F - D - E$.

Die Auflösungen, auf welche die entwickelte Darstellung von (7. und 8.) führt, geben ziemlich grofse Werthe, wenn C eine gröfsere Zahl ist. In diesem Fall lassen sich die nöthigen Rechnungen bedeutend abkürzen, wenn man die Division $\frac{C}{A}$ wirklich ausführt. Dies giebt folgendes Schema:

$$(9.) \quad \begin{cases} x = c_1 - a_1 q + r, \\ y = \quad -a_2 r + s, \\ r = \quad -a_3 s + t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v = \quad -a_n u + d_1, \end{cases}$$

unter der Bedingung, dafs

$$(10.) \quad \frac{C}{A} = c_1 + \frac{d_1}{A},$$

also c_1 der Quotient von $\frac{A}{C}$ und d_1 der durch die Division entstandene Rest ist. Die Gleichungen (7. und 8.) gehen dadurch in folgende über:

(11.) $y = (-1)^{n-1} Au (-1)^{n-2} D(a_2, a_{n-1}) d_1 = (-1)^{n-1} Au (-1)^{n-2} Z_{n-1} d_1,$

(12.) $x = c_1 (-1)^n Bu (-1)^{n-1} D(a_1, a_{n-1}) d_1 = c_1 (-1)^n Bu (-1)^{n-1} N_{n-1} d_1.$

Die besondern Fälle sind:

Für die Quotienten a_1, a_2:

$$(13.) \quad \begin{cases} y = -Au + d_1, \\ x = c_1 + Bu - a_1 d_1, \end{cases}$$

Für die Quotienten a_1, a_2, a_3:

$$(14.) \quad \begin{cases} y = Au - a_2 d_1, \\ x = c_1 - Bu + (a_1 a_2 + 1) d_1. \end{cases}$$

Für a_1, a_2, a_3, a_4:

$$(15.) \quad \begin{cases} y = -Au + (a_2 a_3 + 1) d_1, \\ x = c_1 + Bu - (a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3) d_1. \end{cases}$$

Für a_1, a_2, a_3, a_4, a_5:

$$(16.) \quad \begin{cases} y = Au - (a_2 a_3 a_4 + a_2 + a) d_1, \\ x = c_1 - Bu + (a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1) d, \end{cases}$$

u. s. w. Sollen nur *positive* Werthe für p und q gelten, so wird die Zahl der Auflösungen beschränkt; bei *negativen* Werthen wird sie unendlich. Aus der ersten Bemerkung folgt leicht, dafs bei Einführung der Werthe von u in die Auflösungen (11. u. ff.), bei einer *geraden* Anzahl von Quotienten *negative* und bei einer *ungeraden* Anzahl von Quotienten *positive* Werthe genommen werden müssen. Ein bestimmter Werth von u giebt ein Paar zusammengehöriger Werthe für y und x. Der Quotient c_1 stellt, als solcher, die Grenze von A dar; x kann den Werth von c_1 nicht erreichen.

Zur Auffindung der Zahlenwerthe ist diese Methode recht brauchbar, denn sie erfordert keine Vor-Untersuchungen, sondern giebt die Werthe unmittelbar, und nicht durch eine zurücklaufende Ableitungs-Art.

Ist z. B. die Gleichung

$$(17.) \quad 21x + 31y = 1770$$

aufzulösen, so ist $\frac{21}{31} = K(1, 2, 10)$, $\frac{1770}{21} = 84 + \frac{6}{21}$, also $c_1 = 84$, $d_1 = 6$ und man erhält aus (14.):

$$x = 102 - 31u, \quad y = 21u - 12.$$

Wird 1, 2, 3 statt u gesetzt, so erhält man

$$x = 71,\ 40,\ 9,$$
$$y = 9,\ 30,\ 51.$$

Diese drei Doppelwerthe genügen der vorstehenden Gleichung.

Ist

$$(18.)\quad 17x+47y = 2537$$

gegeben, so ist $\frac{17}{47} = K(2,1,3,4)$, $A=17$, $B=47$, $c_1=149$, $d_1=4$.

Aus (15.) erhält man

$$x = 149-47u-11.4;\quad y = 17u+4.4.$$

Wird 0, 1, 2 statt u gesetzt, so ergeben sich folgende zusammengehörige Doppelwerthe, welche der Gleichung genügen:

$$x = 105,\ 58,\ 11,$$
$$y = 16,\ 33,\ 50.$$

§. 14.

Die in (§. 10.) entwickelten Werthe können auch noch zur Auflösung *unbestimmter* Gleichungen vom *zweiten* Grade benutzt werden. Die dort gefundenen Gleichungen geben dann den Werth der Wurzeln nur annähernd; entweder gröfser oder kleiner als der wirkliche. Um diesen Unterschied zu finden, mufs das Quadrat irgend eines Partialbruchs mit dem der Wurzel verglichen werden. Es ist im Allgemeinen

$$(1.)\quad \left(m+\frac{Z_n}{N_n}\right)^2 \leqq m^2+p,$$

und hieraus ergiebt sich

$$(2.)\quad 2mZ_nN_n+Z_n^2 \leqq N_n^2 p.$$

Um die Beziehungen in (2.) zu ermitteln, ist zwischen einem *geraden* und einem *ungeraden n* zu unterscheiden. Nimmt man die *geraden n,* sucht dann N_{2n} und Z_{2n} nach (5. §. 10) und entwickelt $2mZ_{2n}N_{2n}$ und Z_{2n}^2, N_{2n}^2, so erhält man folgende zwei Ausdrücke:

$$(3.)\quad N_{2n}^2 p$$
$$= [(2m)^{2n}p+2(2n-1)(2m)^{4n-2}p^2+\frac{(2n-2)_2}{(2n-1)(2n-1)}\Big|(2m)^{2n-4}p^3+\frac{(2n-3)_3}{2.(2n-1)(2n-2)_2}\Big|(2m)^{4n-6}p^4\ldots$$
$$\ldots\ldots\frac{2(n+3)_6}{2(n+2)_2(n+2)_4}\Big|(2m)^6p^{2n-2}+\frac{2(n+2)_4}{(n+1)_2(n+1)_2}\Big|(2m)^4p^{2n-1}+2(n+1)_2(2m)^2p^{2n}+p^{2n+1}],$$

$$(4.)\quad 2mZ_{2n}N_{2n}+Z_{2n}^2$$

$$=[(2m)^{4n}p+(2n-1)\left|\begin{matrix}(2m)^{4n-2}p^2+ & (2n-2)_2\\ & (2n-1)(2n-2)\\ & (2n-3)_2\end{matrix}\right|\begin{matrix}(2m)^{4n-4}p^3+ & (2n-3)_3\\ & (2n-2)_2(2n-2)\\ & (2n-1)(2n-3)_2\\ & (2n-4)_3\end{matrix}\left|\begin{matrix}(2m)^{2n-6}p^4\cdots\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right.$$

$$\cdots\cdots\begin{matrix} & n(n+2)_4\\ (n+1)_2 & (n+1)_3\\ & (n+2)_5\end{matrix}\left|\begin{matrix}(2m)^6p^{2n-2}+n(n+1)_2\\ (n+1)_3\end{matrix}\right|(2m)^4p^{2n-1}+n(2m)^2p^{2n}]$$

$$+[(2m)^{4n-2}p^2+2(2n-2)(2m)^{4n-4}p^3+\begin{matrix} & 2(2n-3)_2\\ (2n-2) & (2n-2)\end{matrix}\left|\begin{matrix}(2m)^{2n-6}p^4+\cdots\\ \\ \end{matrix}\right.$$

$$\cdots\cdots+\begin{matrix} & 2n(n+2)_5\\ (n+1)_3 & (n+1)_3\end{matrix}\left|\begin{matrix}(2m)^6p^{2n-2}+2n(n+1)_4(2m)^4p^{2n-1}+n^2(2m)p^{2n}].\\ \\ \end{matrix}\right.$$

Vergleicht man nun die Vorzahlen der Glieder in (3. und 4.), welche den nämlichen Potenzen der ordnenden Gröfsen $(2m)$ und p zugehören, mit einander, so zeigt ein einfacher Calcul ihre Gleichheit. Daher ist (3.) um das Schlufsglied p^{2n+1} gröfser als (4.). Dies führt zu folgender Gleichung:

$$2mZ_{2n}N_{2n}+Z_{2n}^2=N_{2n}^2.p-p^{2n+1}.$$

Addirt man $m^2N_{2n}^2$ auf beiden Seiten und ordnet, so ergiebt sich

$$(5.)\quad \frac{(m+Z_{2n})^2+p^{2n+1}}{N_{2n}^2}=m^2+p.$$

Diese Gleichung zeigt, in welchem Verhältnisse die Wurzel zu dem Quadrate des Zählers und Nenners des $(2n)$ten Partialbruchs eines periodischen Kettenbruchs mit zwei Elementen von der Form (1. §. 10) steht. Setzt man $m+z_{2n}=x$, $N_{2n}=y$ und die Wurzelgröfse $m^2+p=A$, so ergiebt sich aus (5.):

$$(6.)\quad x^2-Ay^2=-p^{2n+1}.$$

Vergleicht man unter den nämlichen Voraussetzungen das Quadrat des Zählers und Nenners des $(2n-1)$ten Partialbruchs mit dem Wurzelwerthe, so ist, wenn die gleichen Entwicklungen nach dem Vorgange von (3., 4. und 5.) gemacht werden:

$$(7.)\quad x_1^2-Ay_1^2=p^{2n}.$$

Die Gleichungen (5. und 7.) lassen sich unmittelbar auf Ausdrücke von der Form $\sqrt{(m^2-p)}$ anwenden, wenn man $-p$ statt $+p$ setzt. Man erhält für $m^2-p=A_1$ folgendes Paar zusammengehöriger Gleichungen:

$$(8.) \quad x^2 - A_1 y^2 = +p^{2n+1},$$
$$(9.) \quad x_1^2 - A_1 y_1^2 = +p^{2n}.$$

Für $p = 1$ gehen diese Gleichungen in

$$(10.) \quad x^2 - Ay^2 = -1 \quad \text{und} \quad x_1^2 - Ay_1^2 = +1,$$
$$(11.) \quad x^2 - A_1 y^2 = +1 \quad \text{und} \quad x_1 - A_1 y_1^2 = +1$$

über. Die Formen in (11.) gelten für einen Partialbruch von der *geraden* und von der *ungeraden* Ordnung, also für *jeden*.

Aus (5.) ist

$$\frac{(m+Z_{2n})^2}{N_{2n}^2} + \frac{p^{2n+1}}{N_{2n}^2} = m^2 + p = A.$$

Ist $2m$ durch p ohne Rest theilbar, so mufs auch, wie aus (§. 10) leicht zu erweisen, der Nenner N_{2n}^2 durch p^{2n} ohne Rest theilbar sein. Hieraus folgt

$$\frac{(m+Z_{2n})^2 + p}{N_{2n}^2} = A,$$

also auch

$$(12.) \quad x^2 - Ay^2 = -p.$$

Aus (7.) wird unter den nämlichen Voraussetzungen

$$(13.) \quad x_1^2 - Ay_1^2 = +1.$$

Aus (8. und 9.) wird für $A_1 = m^2 - p$, unter dieser Bedingung:

$$(14.) \quad x^2 - A_1 y^2 = p \quad \text{und} \quad x_1^2 - A_1 y_1^2 = +1.$$

Dadurch sind die Bedingungen gefunden, unter welchen die Gleichungen (6 — 14.) gelten und aufgelöset werden können.

Die Art, wie die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1$$

durch Entwicklung der Wurzel-Ausdrücke in Kettenbrüche aufgelöset wird, ist bekannt. Dabei läfst sich aber nicht im Voraus angeben, wann die eine oder die andere Auflösung erlangt wird. Fasset man nun die in den hier erhaltenen Resultaten liegenden Gesetze zusammen, so ergiebt sich Folgendes.

(15.) Werden Wurzelgröfsen in periodische Kettenbrüche mit zwei Elementen entwickelt, so lösen die *geraden* Partialbrüche die Gleichungen mit *zweierlei* Zeichen (Form. 6. u. 8.), die *ungeraden* aber die Gleichungen mit dem *positiven* Zeichen (Form. 7. u. 9.) auf. Das *negative* Zeichen erscheint, wenn p im Wurzel-Ausdruck das *positive* Zeichen, das *positive* Zeichen, wenn p das *negative* Zeichen hat. Die Gleichungen (6 — 9.) gelten, wenn $2m$ nicht durch p theilbar ist.

(16.) Unter den nämlichen Bedingungen gelten die Gleichungen (12. u. 14.). Dabei tritt die weitere Bedingung hinzu, dafs $2m$ durch p ohne Rest theilbar sein mufs, wirklich getheilt werde, p aber nicht der Einheit gleich sei.

(17.) Die Gleichungen (10. u. 11.) beziehen sich auf Wurzel-Ausdrücke, in welchen $p = 1$ ist. Sie unterliegen den in (15.) angegebenen Bestimmungen.

(18.) Wird die Division von $\frac{2m}{p}$ vor der Darstellung der Zahlenwerthe der Partialbrüche oder der Gleichungen (6 — 9.) nicht ausgeführt, obgleich p in $2m$ ganz oder zum Theil enthalten ist, so bleiben die genannten Gleichungen in Kraft und gehen nicht in (10. u. 11.) über. Ist aber p in $2m$ nur theilweise enthalten, so dafs $\frac{2m}{p} = \frac{s}{t}$ ist, so bleiben (6 — 9.) noch immer gültig, und p geht in t über.

Soll z. B. die Gleichung

$$x^2 - Ay = \mp 2$$

aufgelöset werden, so lösen alle *geraden* Partialbrüche von

$$\sqrt{3},\ \sqrt{6},\ \sqrt{11},\ \sqrt{18},\ \sqrt{27},\ \sqrt{38},\ \sqrt{51},\ \ldots$$

dieselbe in Bezug auf das *negative* Zeichen auf; denn sie gehören der Form $m^2 + 2$ an. Alle *geraden* Partialbrüche von

$$\sqrt{2},\ \sqrt{7},\ \sqrt{14},\ \sqrt{23},\ \sqrt{34},\ \sqrt{47},\ \ldots$$

lösen die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = +2$$

auf, denn sie gehören der Form $m^2 - 2$ an. Es ist

$$\sqrt{3} = 1 + K(1, 2, 1, 2, \ldots);$$

die zugehörigen Partialbrüche sind der Reihe nach:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41}.$$

Man erhält also:

$$\begin{aligned} 5^2 - 3.\ 3^2 &= 25 - 27 = -2, \\ 19^2 - 3.11^2 &= 361 - 363 = -2, \\ 71^2 - 3.41^2 &= 5041 - 5043 = -2, \end{aligned}$$

u. s. w. Ferner ist

$$\sqrt{2} = 2 + K(-2, 4, -2, 4, \ldots);$$

die Werthe des 2ten, 4ten, 6ten, ... Partialbruchs sind

$$2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7},\ 2 - \frac{24}{41} = \frac{58}{41},\ 2 - \frac{140}{239} = \frac{338}{239}$$

und man erhält:

$$10^2 - 2.\ 7^2 = 100 - 98 = +2,$$
$$58 - 2.\ 41^2 = 3364 - 3362 = +2,$$
$$338^2 - 2.239^2 = 114244 - 114242 = +2,$$

u. s. w. Die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = \mp 3$$

wird durch die geraden Partialbrüche von

$$\sqrt{12},\ \sqrt{39},\ \sqrt{84},\ \sqrt{147},\ \ldots$$
$$\sqrt{6},\ \sqrt{33},\ \sqrt{78},\ \sqrt{141},\ \ldots$$

aufgelöset u. s. w. Die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = +3^2$$

wird durch die ersten Partialbrüche von

$$\sqrt{4},\ \sqrt{7},\ \sqrt{19},\ \sqrt{28},\ \sqrt{52},\ \ldots$$
$$\sqrt{1},\ \sqrt{13},\ \sqrt{22},\ \sqrt{48},\ \sqrt{61},\ \ldots$$

aufgelöset und es ist:

$$5^2 - 4.\ 2^2 = 25 - 16 = 3^2,$$
$$11^2 - 7.\ 4^2 = 121 - 112 = 3^2,$$
$$35^2 - 19.\ 8^2 = 1225 - 1216 = 3^2,$$
$$53^2 - 28.10^2 = 2809 - 2800 = 3^2,$$

u. s. w. Ferner ist:

$$5^2 - 1.\ 4^2 = 25 - 16 = 3^2,$$
$$29^2 - 13.\ 8^2 = 841 - 832 = 3^2,$$
$$47^2 - 22.10^2 = 2209 - 2200 = 3^2,$$
$$95^2 - 46.14^2 = 9025 - 9016 = 3^2,$$

u. s. w. Hieraus ergeben sich folgende zwei zusammen bestehende Gleichungen:

$$x^2 - Ay^2 = 3^2,$$
$$(x-6)^2 - (A-6)y = 3^2,$$

und man kann von der ersten auf die andere übergehen. Zugleich sieht man, dafs auch folgende zwei Gleichungen zusammen bestehen:

$$x^2 - Ay^2 = +p^2,$$
$$(x-2p)^2 - (A-2p).y^2 = +p^2.$$

Die hier mitgetheilten Resultate waren schon vor dem Jahre 1842 niedergeschrieben. Der Druck derselben hat sich bis jetzt verspätet.

Über den Gegenstand überhaupt sind die Abhandlungen von *Möbius* (6ter Band d. Journ.) und von *Stern* (10ter u. 11ter Bd.) zu vergleichen; wo sich auch die bezügliche Literatur angegeben findet.

Freyburg im Breisgau, im December 1851.

8.

Rectification des formules qui expriment le nombre des décompositions d'un nombre donné en deux carrés.

(Par M. *Paul Volpicelli,* professeur à l'université de Rome.)

I.

La seconde des deux formules données par M. *Gauſs* et *Legendre* *), pour exprimer le nombre des décompositions possibles d'un nombre donné en deux carrés, a été considérée par M. *Terquem* **), et par moi-même ***), comme affectée d'une erreur typographique. Le but de cette note est de faire voir, en premier lieu, que cette formule ne contient aucune espèce d'erreur; en second lieu, que outre les deux formules établies par les deux géomètres précités, il en existe une troisième, qui n'a pas encore été énoncée, et qui se rapporte aux cas non compris dans celles-là.

Posons d'abord qu'un nombre quelconque M peut être représenté par

$$M = 2^{\mu} S h_1^{\alpha} h_2^{\beta} h_3^{\gamma} \dots h_k^{\tau},$$

où les facteurs $h_1, h_2, \dots h_k$ sont des nombres premiers, chacun de la forme $4m+1$, et S un produit de facteurs premiers, chacun de la forme $4n+3$: puis μ, α, β, $\dots$ τ des exposants entiers, et positifs. On sait par la théorie des nombres que, si S n'est pas un *carré*, M ne peut pas être décomposé en deux carrés. Puis on a $S=1$ si l'entier M ne contient aucun facteur de la forme $4n+3$; et $\mu=0$ si M est *impair*.

II.

Cela posé, quel que soit l'entier μ, si au moins un des exposants α, β, $\dots$ τ est *impair*, le nombre ν des décompositions possibles de M en deux carrés, est

$$(1.) \qquad \nu = \tfrac{1}{2}[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots(\tau+1)].$$

---

*) Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae 1801, p. 219. — Recherches arithmétiques par M. *Gauſs*. Paris 1807, p. 257. — Théorie des nombres par *Legendre*. Paris 1830, p. 314.

**) Nouvelles Annales de mathématiques, Paris 1850, T. IX, p 307 et 308.

***) Atti dell' accademia pontificia de' Nuovi Lincei. Roma 1850 T. IV, p. 28.

Voilà la première des deux formules données par les illustres ***Gauſs*** et ***Legendre*** dans les ouvrages cités ci-dessus. Nous l'appliquerons à quelques

Exemples.

1°. Soit

$$M = 2^{2p}.17.13^3 = 2^{2p}.37349.$$

On a $\mu = 2p$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, et par suite $\nu = 4$: En effet il se trouve facilement:

$$2^{2p}.37349 = 2^{2p}(10^2+193^2 = 82^2+175^2 = 130^2+143^2 = 182^2+65^2).$$

2°. Soit

$$M = 17.13^3.5^3 = 4668625.$$

On a $\mu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$, donc $\nu = 16$: Et en effet on trouve

$$4668625 = \begin{cases} 1880^2+2065^2 = 1980^2+ 865^2 = 1340^2+1695^2 = 2160^2+ 55^2 \\ = 780^2+2015^2 = 2080^2+ 585^2 = 260^2+2145^2 = 1560^2+1495^2 \\ = 276^2+2143^2 = 496^2+2103^2 = 552^2+2089^2 = 1252^2+1761^2 \\ = 1144^2+1833^2 = 1716^2+1313^2 = 1872^2+1079^2 = 2132^2+ 351^2. \end{cases}$$

3°. Soit

$$M = 2^3.5^2.13 = 2600.$$

On a $\mu = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, et par consequent $\nu = 3$: En effet on obtient:

$$2600 = 10^2+50^2 = 22^2+46^2 = 34^2+38^2.$$

III.

Posons en second lieu, que μ soit ***impair***. Si tous les exposants $\alpha, \beta, \ldots \tau$ sont des nombres ***pairs***, le nombre ν des décompositions de M en deux carrés sera exprimé par

$$(2.) \qquad \nu = \tfrac{1}{2}[(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\tau+1)]+\tfrac{1}{2}.$$

Dans ce deuxième cas, en posant $\mu = 2p+1$, il est clair que une des solutions de l'équation

$$x^2+y^2 = 2^{2p+1}h_1^{\alpha}h_2^{\beta}h_3^{\gamma}\ldots h_k^{\tau}$$

sera

$$x = y = 2^p h_1^{\frac{1}{2}\alpha} h_2^{\frac{1}{2}\beta} h_3^{\frac{1}{2}\gamma} \ldots h_k^{\frac{1}{2}\tau}.$$

Les formules (1. et 2.) sont celles que M. M. ***Gauſs*** et ***Legendre*** ont données à l'endroit cité de leurs ouvrages, pour assigner le nombre des décompositions dont nous parlons. La formule (2.), comme il a été dit au commencement de cette note, fut censée affectée d'une erreur typographique;

c'est-à-dire, on croyoit que dans cette formule il y avoit à lire $-\frac{1}{2}$ au lieu de $+\frac{1}{2}$. Il n'en est pas ainsi; la formule (2.) satisfait plutôt exactement au second cas que nous considérons maintenant. Cela se vérifie dans ce qui suit.

Exemple.

Soit

$$M = 2^3 . 5^2 . 13^2 = 33800.$$

On a $\mu = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, donc $\nu' = 5$: Et en effet il se trouve:

$$33800 = 26^2 + 182^2 = 46^2 + 178^2 = 94^2 + 158^2 = 170^2 + 70^2 = 130^2 + 130^2.$$

IV.

En troisième lieu, supposant μ ***pair***, ou ***zéro***, et tous les exposants $\alpha, \beta, \ldots \tau$ ***pairs***, le nombre ν'' des décompositions sera exprimé par

$$(3.) \qquad \nu'' = \tfrac{1}{2}[(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\tau+1)] - \tfrac{1}{2}.$$

Exemples.

1°. Soit

$$M = 2^{2p} . 5^2 . 17^2 = 2^{2p} . 7225.$$

On a $\mu = 2p$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, et par suite $\nu'' = 4$: En effet on obtient:

$$2^{2p} . 7225 = 2^{2p}(51^2 + 68^2 = 75^2 + 40^2 = 13^2 + 84^2 = 77^2 + 36^2).$$

2°. Soit

$$M = 5^2 . 13^2 = 4225.$$

On a $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, donc $\nu'' = 4$: Et en effet il se trouve:

$$4225 = 25^2 + 60^2 = 39^2 + 52^2 = 33^2 + 56^2 = 63^2 + 16^2.$$

V.

Selon mois, la formule (3.) est celle qu'il convient de joindre aux deux autres, déjà connues, pour obtenir le nombre des décompositions dont nous parlons. Par l'ensemble des formules (3. 1. et 2.), on peut dans tous les cas trouver le nombre des décompositions.

Si dans la formule (3.) nous posons

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \tau = 2,$$

on aura

$$M = 2^{2p} h_1^2 h_2^2 h_3^2 \ldots h_k^2 = z^2,$$

et ensuite

$$(4.) \qquad \nu''' = \tfrac{1}{2}(3^k - 1),$$

ν''' étant alors le nombre des décompositions possibles de $M = z^2$ en deux carrés, c'est-à-dire, ν''' est le nombre des solutions, en entiers, de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Je trouvois la formule (4.) en août 1850 par une voie directe, et je la communiquois à M. ***De Morgan*** à ***Londres;*** elle fut publiée à Paris dans le journal intitulé „Nouvelles Annales de mathématiques" *). Ce fut alors que, la formule (4.) ne pouvant être déduite ni de (1.), ni de (2.) (qui étaient les seules formules alors connues), M. ***Terquem*** et moi croyoient que la formule (2.) contenait l'erreur typographique indiquée ci-dessus: opinion qui maintenant doit être rejetée en vertu des observations précédentes.

Si l'on ne voulait pas considérer dans le second cas la somme de deux carrés égaux, alors on aurait $\nu' = \nu''$; c'est-à-dire que l'entier

$$M = 2^{2p+1} h_1^{2a} h_2^{2b} h_3^{2c} \ldots h_k^{2t}$$

serait décomposable autant de fois en deux carrés ***différents*** entr'eux, qu'il y a d'unités dans (3.).

Si, pour embrasser tous les cas relatifs au nombre des décompositions possibles d'un nombre donné M en deux carrés, on fait, pour abréger:

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\tau+1) = H,$$

le nombre dont il s'agit sera exprimé par les trois formules:

$$\nu = \tfrac{1}{2}H, \quad \nu' = \tfrac{1}{2}(H+1), \quad \nu'' = \tfrac{1}{2}(H-1).$$

La première de celles-ci suppose que, quel que soit μ, au moins un des exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$ est *impair:* la deuxième suppose que μ est *impair*, et que tous les exposants sont *pairs*: la troisième suppose que μ est *pair*, ou *zéro*, et que tous les exposants sont *pairs*. C'est pourquoi il faut dans les différents cas qui se rapportent à notre question, avoir égard non seulement aux exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$, mais encore à l'exposant μ.

La démonstration des formules (1. et 3.) que j'ai déjà publiée **) peut s'étendre facilement, sans changer de principes, même à la formule (2.), à laquelle on substitua alors la formule (3.), qui au contraire doit être jointe aux formules (1. et 2.).

Rome, Decembre 1853.

---

*) T. IX. Paris 1850, p. 306.
**) Atti dell' accademia pontificia de' Nuovi Lincei. Roma 1850 T. IV, p. 28.

9.

Sur les différents genres de multiplication.

(Par M. *Grassmann*, prof. des mathém. au collège de Stettin.)

M. *Cauchy* a communiqué à l'Académie des Sciences, le 10, 17 et 24 janvier de l'année passée, les principes d'un calcul fondé sur des quantités qu'il nomme *clefs algébriques*. (Voyez Comptes rendus XXXVI pages 70, 129, 161.) Il a fait voir qu'à l'aide de ce calcul, on peut résoudre avec une grande facilité des questions d'analyse et de mécanique, dans lesquelles l'application des méthodes ordinaires entraînerait de longs et pénibles calculs. Ce n'est que depuis quelques semaines que j'ai pu obtenir connaissance de ces communications; mais au premier coup d'oeil je reconnus que les principes qui y sont établis, et les résultats qui en ont été tirés, étaient absolument les mêmes que ceux, que j'avais publiés déjà en 1844 (dans un ouvrage intitulé *„Ausdehnungslehre oder Wissenschaft der extensiven Gröfse. Leipzig 1844.“*) et dont j'avais donné en même temps des applications nombreuses à l'analyse algébrique, à la géométrie, à la mécanique et à d'autres branches de la physique. Depuis la publication de cet ouvrage, je suis parvenu à simplifier et à généraliser les principes du calcul qui y est exposé, mais je m'étais proposé d'en retarder la publication jusqu'au temps ou j'aurais le loisir de remanier tout l'ouvrage. Cependant, en raison des articles cités, je me trouve forcé de publier ici quelques-uns des resultats obtenus, comme je vois que, dans ses *clefs algébriques*, M. *Cauchy* a trouvé en quelque sorte les clefs, non seulement pour entrer dans la théorie que j'ai publiée jusqu'à présent, mais encore pour ouvrir la porte à plusieurs résultats non encore publiés. Ce qui en paraît le plus important, c'est le développement des divers genres de multiplication, dont je me propose de donner ici un aperçu.

L'arithmétique ne connaît qu'un seul genre de multiplication, dont la propriété est que l'on puisse intervertir l'ordre des facteurs, et réunir en un produit particulier autant de facteurs que l'on voudra, sans que la valeur du produit total en soit altérée; et qui de plus ne s'évanouit pas, à moins que l'un de ses facteurs ne devienne égal à zéro. C'est surtout dans la théorie des quantités dans l'espace, que j'ai nommées *extensives*, et traitées dans

l'ouvrage cité, que se présentent des genres de multiplication entièrement différentes de celle de l'analyse ordinaire, dont l'application néanmoins s'étend, à peu près, à toutes les branches des mathématiques et de la physique.

Pour fixer l'idée générale de la multiplication dont il s'agit, je commencerai par établir les principes sur lesquels il paraît convenable de s'appuyer.

Je dis que deux ou plusieurs quantités $A, B, C, \ldots$ ont entr'elles une *relation algébrique*, quand l'une ou l'autre d'entre elles est égale à un polynôme dont les termes sont proportionnels aux autres, en sorte que l'on ait, par exemple,

$$A = \beta B + \gamma C + \cdots,$$

où $\beta, \gamma, \ldots$ désignent de simples nombres, soit rationnels ou irrationnels, soit réels ou imaginaires, soit égaux à zéro, ou non. Pour en donner une idée palpable, concevons que les lettres A, B désignent des objets différents quelconques, par exemple, différentes espèces de plantes. Alors il est évident que la chose représentée par la lettre A ne saurait être regardée comme le produit de la chose B par aucun facteur algébrique; ou, pour en choisir un exemple qui soit plus conforme aux mathématiques, supposons que A et B désignent des *lignes* données en grandeur et en direction, et supposons que le produit d'une ligne par un facteur algébrique réel, représente une ligne de la même direction, mais dont la grandeur est à celle de la ligne donnée comme le facteur algébrique est à l'unité; supposons de plus que le produit d'une ligne réelle par un facteur imaginaire, soit une ligne imaginaire. Alors la ligne A ne pourra évidemment résulter d'une multiplication de la ligne B par un facteur algébrique, à moins que les lignes ne soient paralèlles entre elles. D'où il résulte que les lignes A et B n'ont aucune relation algébrique entre elles.

Considérons maintenant n quantités $a, b, c \ldots$ qui n'ont aucune relation algébrique entre elles: alors il est évident que l'on peut en déduire une infinité de quantités, en multipliant chacune d'elles par un facteur algébrique, et en ajoutant les produits ainsi obtenus. Nous appellerons *unité relative* toute quantité que l'on se propose d'employer, pour en déduire d'autres quantités au moyen d'une multiplication par des facteurs algébriques, tandis que nous réserverons à l'unité des nombres le nom de *unité absolue*. De même nous appellerons *système d'unités relatives* tout assemblage de plusieurs quantités, non liées entre elles par des relations algébriques, mais destinées pour en dériver par voie de multiplication et d'addition, toutes les quantités que

l'on veut considérer. Enfin, nous désignerons les quantités ainsi obtenues par le nom de ***quantités extensives,*** en sorte que, par exemple le polynôme

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignent de simples nombres, et $a, b, c, \ldots$ un système d'unités relatives, devra être regardé comme une quantité ***extensive;*** et nous dirons qu'elle est ***composée*** des unités $a, b, c, \ldots$ au moyen des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (Dans mon ouvrage cité, j'ai désigné les unités relatives par le nom „***Grundänderungen,***" et un système d'unités relatives par le nom de „***Von einander unabhängige Grundänderungen***" (Voir §. 16.): dénominations qui résultent du point de vue particulier, sous lequel les quantités extensives y sont envisagées.) Il ne serait pas convenable d'employer l'épithète ***composé*** pour désigner les quantités extensives elles-mêmes, parcequ'il arrive souvent que les quantités extensives sont des quantités aussi simples que les unités dont elles résultent. Par exemple, la diagonale d'un parallélogramme peut être regardée comme la somme des côtés qui partent du même point, pourvu que l'on tienne compte de leur direction, aussi bien que de leur grandeur. Donc, si l'on regarde ces côtés comme des unités relatives, il est clair que la diagonale est composée de ces unités, sans qu'elle cesse pour celà d'être une simple ligne. Nous remarquons à cette occasion que l'on peut regarder trois lignes, ou quatre points quelconques dans l'espace, comme un système d'unités relatives, et qu'on peut en composer toutes les lignes ou tous les points de l'espace, à moins que les lignes ne soient parallèles à un même plan et que les points ne soient situés dans un même plan. (Voyez sur ce sujet mon ouvrage précédemment cité, et où je suis entré dans des détails; en suivant, quant aux points, les principes établis par M. ***Moebius*** dans son calcul barycentrique. Quant à la somme des lignes données en grandeur et direction, il est remarquable que plusieurs géomètres ont conçu cette idée presque en même temps et indépendamment les unes des autres.)

Considérons maintenant la ***multiplication*** des ***quantités extensives.*** La multiplication en général est caractérisée par la propriété, que l'on peut multiplier, chacun par chacun, les termes, dont les facteurs sont composés, ou sont censés composés, sans que la valeur du produit total en soit alterée. Il faut cependant en général tenir compte de l'ordre, dans lequel les multiplications sont effectuées successivement; en sorte que les termes, qui entrent dans chaque produit, y soient rangés dans le même ordre, dans lequel les facteurs qui les

renfermaient, étaient rangés dans le produit donné. Il est facile de voir que l'on pourrait déduire de cette idée générale toutes les lois de la multiplication des nombres, sans y ajouter aucune autre condition que celle que 1.1 soit égal à 1: condition qui servira à définir l'unité absolue. Il résulte aussi de l'idée générale, qu'ayant à multiplier des quantités quelconques, affectées chacune d'un facteur algébrique, il sera permis de multiplier le produit de ces quantités par le produit des facteurs algébriques, à moins que l'on n'intervertisse l'ordre des facteurs dans le premier des produits. Il sera maintenant facile de *définir* précisément la multiplication des quantités extensives.

Définition. Multiplier des quantités extensives, c'est multiplier d'abord dans le même ordre, chacune par chacune, les unités dont les diverses quantités extensives sont composées: multiplier ensuite ces produits chacun par le produit des coefficients dont les unités qui y entrent étaient affectées, et ajouter finalement par voie d'addition les produits ainsi obtenus.

En d'autres termes:

On multipliera les quantités extensives en suivant les règles de la multiplication algébrique, en ayant seulement soin que l'ordre des facteurs ne soit point altéré. Par exemple, le produit des quantités extensives $\alpha a + \beta b$ et $\gamma a + \delta b$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des nombres, a et b des unités relatives, sera:

$$(\alpha a + \beta b)(\gamma a + \delta b) = \alpha\gamma . aa + \alpha\delta . ab + \beta\gamma . ba + \beta\delta . bb.$$

Il n'y aura donc qu'à définir les produits des unités relatives. On conçoit que, si l'on n'admet aucune relation entre ces produits, il faudra regarder ces produits comme de nouvelles unités relatives, que l'on pourrait appeler unités d'un degré supérieur, par exemple du $n$ième degré, n étant le nombre des facteurs. Mais rien n'empêche de supposer des relations algébriques arbitrairement choisies, qui lient entre eux les produits des unités. Quelles que soient d'ailleurs ces relations, on pourra toujours en représenter chacune par une équation, en égalant à zéro la somme de ces produits, multipliés chacun par un facteur algébrique. Soient, pour fixer les idées,

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

des nombres quelconques, et

$$A, B, C, \ldots$$

les produits des unités relatives: alors toute relation entre ces produits pourra

être représentée par une équation de la forme

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \cdots = 0:$$

équation qu'on peut appeler équation de condition par rapport à la multiplication dont il s'agit. Étant donné le système de toutes les équations de condition relatives à une multiplication particulière, celle-ci en sera déterminée précisément; et il est évident qu'à l'aide de ces équations, on pourra éliminer autant des produits $A, B, C, \ldots$ qu'il y en a d'équations. Ces éliminations étant effectuées, le reste des produits $A, B, C, \ldots$ formera un système d'unités relatives, qui serviront à en composer toutes les quantités fournies par la multiplication dont il s'agit.

Voilà l'idée la plus générale qu'on puisse concevoir de la multiplication de quantités quelconques. C'est cette idée qui a servi de base aux développements dans mon ouvrage cité (Voyez „*Ausdehnungslehre*" §. 12.), et que j'ai tâché ensuite de perfectionner à plusieurs égards. C'est encore cette idée que M. *Cauchy* paraît avoir eue en vue dans ses mémoires sur les *clefs algébriques*. En effet: les *clefs algébriques* de M. *Cauchy* ne sont au fond que les unités relatives; et ses *facteurs symboliques* conviennent, du moins dans un certain rapport, aux quantités extensives telles que je les ai définies. La différence ne consiste qu'en ce que M. *Cauchy* regarde les clefs algébriques seulement comme un moyen pour résoudre divers problèmes de l'analyse et de la mécanique et qui, les problèmes étant résolus, disparaissent, tandis que d'après les principes établis par moi, on est en état, à chaque pas du procédé, d'attribuer une signification indépendante aux unités relatives et aux quantités qui en sont composées, qu'elle que soit d'ailleurs la marche que l'on suive.

Pour considérer les produits de quantités quelconques, on pourra se borner d'abord à des produits de *deux* facteurs. Car, quel que soit le nombre des facteurs, il sera toujours possible de les réduire à *deux* facteurs; ce que l'on effectuera, en partageant tous les facteurs en deux groupes, et en réunissant ensuite les facteurs de l'un et de l'autre groupe à deux produits particuliers, lesquels multipliés, donneront le produit proposé. Si donc les lettres $u_1, u_2, \ldots u_n$ désignent des unités relatives, on pourra présenter toute équation de condition sous la forme

$$S(\alpha_{r,s} u_r u_s) = 0,$$

où les $\alpha_{r,s}$ désignent des nombres quelconques et le signe sommatoire doit être étendu à toutes les valeurs entières des indices r et s entre les limites

1 et n. Il est évident que l'on peut supposer plusieurs équations de cette forme qui doivent subsister simultanément, et que d'ailleurs tous les coefficients, tels que $\alpha_{r,s}$, sont tout-à-fait arbitraires. On se trouverait ainsi conduit à une infinité de multiplications particulières, qui ne semblent promettre aucune utilité pour la science. Le plus grave inconvénient, qui s'y trouve, est surtout que les équations de condition cessent généralement de subsister lorsqu'on y substitue aux unités les quantités qui en sont composées. Pour faire disparaître cet inconvénient, nous supposerons premièrement que l'on puisse changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, ou bien, de deux quelconques d'entre elles, et substituer chacune d'elles à la place de l'autre, sans que les équations de condition cessent de subsister. En second lieu, nous supposerons en outre que, pour deux unités quelconques, il y ait toujours deux quantités extensives, qui ne soient ni multiples des unités, ni égales à elles, et qui néanmoins, étant substituées à ces unités, satisfassent encore aux équations de condition. En troisième lieu enfin, nous supposerons qu'il soit même permis de substituer à toutes les unités des quantités qui en sont composées à volonté, sans que les équations de condition en soient altérées.

Nous désignerons, dans la suite, les multiplications qui résultent de ces trois suppositions, respectivement par les noms des ***multiplications symétriques, circulaires*** et ***linéales;*** ce qui nous servira, dès à present, pour distinguer entre elles les trois suppositions que nous venons d'exposer.

Dans la première supposition, soit l'équation

$$S(\alpha_{r,s}u_r u_s) = 0$$

l'une quelconque des équations de condition. Après l'avoir mise sous la forme

$$S(\alpha_{1,r}u_1 u_r) + S(\alpha_{r,1}u_r u_1) + \alpha_{1,1}u_1 u_1 + S(\alpha_{r,s}u_r u_s) = 0,$$

où les indices r et s sont différents de 1, substituons $-u_1$ à la place de $+u_1$, et nous aurons:

$$-S(\alpha_{1,r}u_1 u_r) - S(\alpha_{r,1}u_r u_1) + \alpha_{1,1}u_1 u_1 + S(\alpha_{r,s}u_r u_s) = 0.$$

Ces équations, ajoutées et retranchées, donneront:

$$\alpha_{1,1}u_1 u_1 + S(\alpha_{r,s}u_r u_s) = 0,$$

et

$$S(\alpha_{1,r}u_1 u_r) + S(\alpha_{r,1}u_r u_1) = 0.$$

Puis, en substituant dans la première de ces équations, $-u_2$ à la place de l'unité u_2, on en tirera, par voie d'addition:

$$\alpha_{1,1}u_1 u_1 + \alpha_{2,2}u_2 u_2 + S(\alpha_{r,s}u_r u_s),$$

les indices r et s étant différents des indices 1 et 2. En poursuivant de cette manière, on obtiendra finalement l'équation

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \cdots \alpha_{n,n}u_nu_n.$$

De même, en substituant, dans la seconde des équations ci-dessus trouvées, $-u_2$ à la place de $+u_2$, et en retranchant l'équation ainsi obtenue de celle d'où l'on est parti, on trouvera l'équation

$$\alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,1}u_2u_1,$$

dans laquelle les indices 1 et 2 pourront être remplacés par deux quelconques des indices 1 ... n. On est donc conduit à la proposition suivante.

Théorème 1. „Si l'équation

$$S(\alpha_{r,s}u_ru_s) = 0$$

est l'une quelconque des équations de condition relatives à une multiplication, et qu'il soit d'ailleurs permis de changer le signe de chacune des unités relatives u_1, u_2, ... u_n, sans que les équations de condition cessent de subsister, on aura les équations suivantes:

$$(1.) \quad \alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \cdots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0$$

et

$$(2.) \quad \alpha_{1,2}u_1u_2 + \alpha_{2,1}u_2u_1 = 0;$$

dont la dernière aura encore lieu, quand on y remplace les indices 1 et 2 par deux différents quelconques parmi les indices 1 ... n."

Ajoutons maintenant à la supposition précédemment établie, cette autre, que l'on puisse substituer réciproquement l'une quelconque des unités à l'autre, sans altérer par là les équations de condition. Cette hypothèse admise, en substituant, dans l'équation (1.) du théorème précédent, les unités u_1 et u_2 l'une à l'autre, on aura l'équation

$$\alpha_{1,1}u_2u_2 + \alpha_{2,2}u_1u_1 + \cdots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0;$$

donc, en la retranchant de l'équation primitive

$$\alpha_{1,1}u_1u_1 + \alpha_{2,2}u_2u_2 + \cdots + \alpha_{n,n}u_nu_n = 0,$$

on obtiendra celle-ci:

$$(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})(u_1u_1 - u_2u_2) = 0.$$

De plus, en remplaçant, dans la même équation (1.), les unités

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n$$

respectivement par

$$u_2, u_3, \ldots u_n, u_1$$

on en tirera l'équation

$$(\alpha_{2,2} - \alpha_{3,3})(u_2 u_2 - u_3 u_3) = 0.$$

Puis, en appliquant le même remplacement à l'équation obtenue, et ainsi de suite, jusqu'à ce que chaque unité soit changée successivement dans toutes les autres, et en ajoutant finalement toutes ces équations, on obtiendra pour équation résultante:

$$(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots \alpha_{n,n})(u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots u_n u_n) = 0.$$

Considérons maintenant l'autre équation du théorème précédent, savoir:

$$\alpha_{1,2} u_1 u_2 + \alpha_{2,1} u_2 u_1 = 0.$$

En y substituant l'une à l'autre les deux unités u_1 et u_2, nous aurons

$$\alpha_{2,1} u_1 u_2 + \alpha_{1,2} u_2 u_1 = 0.$$

Ces équations, combinées entre elles par voie d'addition et de soustraction, donneront les équations

$$(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1})(u_1 u_2 + u_2 u_1) = 0,$$
$$(\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1})(u_1 u_2 - u_2 u_1) = 0,$$

dans lesquelles on peut remplacer les indices 1 et 2 par deux quelconques différents parmi les valeurs 1 ... n. Les résultats, auxquels on est arrivé, peuvent être énoncés par la proposition suivante.

Théorème 2. „S'il est permis de changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, ainsi que d'en substituer réciproquement l'une quelconque à l'autre, sans que les équations de condition cessent de subsister, on peut en tirer les systèmes suivants d'équations:

(1.) $(\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1})(u_1 u_2 - u_2 u_1) = 0,$

(2.) $(\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1})(u_1 u_2 + u_2 u_1) = 0,$

(3.) $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})(u_1 u_1 - u_2 u_2) = 0,$

(4.) $(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots \alpha_{n,n})(u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots u_n u_n) = 0,$

dont les trois premiers subsistent encore, quand on y substitue à la place des indices deux quelconques différents parmi les valeurs 1 ... n."

Le premier membre de chacune des équations précédentes contient deux facteurs; par conséquent, le second membre étant égal à zéro, il faudra que l'un ou l'autre de ces facteurs *s'évanouisse.* On tirera donc de chacune de ces équations deux nouvelles équations, dont l'une ou l'autre devra se vérifier, et dont l'une se rapporte aux coefficients, l'autre aux unités. Or il

est clair que chacune des équations qui renferment les unités, entraînera avec elle les autres qui en résultent par l'échange des indices, et qu'il en sera de même pour les équations des coefficients. Il s'ensuit que chacun des quatre systèmes d'équations ci-dessus établis, se partagera en deux systèmes, dont l'un ou l'antre devra subsister. En plaçant ces systemes deux à deux en ligne horizontale, on aura:

1°.	ou $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1}$ etc.,	ou $u_1 u_2 = u_2 u_1$ etc.,
2°.	ou $\alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} = 0$ etc.,	ou $u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$ etc.,
3°.	ou $\alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \alpha_{3,3} \ldots$,	ou $u_1 u_1 = u_2 u_2 = u_3 u_3 \ldots$,
4°.	ou $\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots \alpha_{n,n} = 0$,	ou $u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots u_n u_n = 0$.

Il y a donc *seize* cas différents, puisqu'on peut choisir l'un ou l'autre système de chaque colonne horizontale. Or il est évident que, réciproquement, toutes les équations que nous venons d'établir entre les unités, continueront encore de subsister, quand on y fait les substitutions ci-dessus désignées. On est donc conduit à la proposition suivante.

Théorème 3. „Entre deux facteurs, composés des unités relatives u_1, u_2, ... u_n, il en existe *seize* espèces de multiplication; de sorte que les équations de condition subsistent encore, soit que l'on échange arbitrairement les unités relatives, soit que l'on change le signe de l'une quelconque d'entre elles. On obtient les équations de condition relatives à chacune de ces espèces, en choisissant, comme l'on voudra parmi ces quatre systèmes d'équations suivants:

$$(1.)\quad u_r u_s = u_s u_r,$$

$$(2.)\quad u_r u_s + u_s u_r = 0,$$

$$(3.)\quad u_1 u_1 + u_2 u_2 = \cdots = u_n u_n,$$

$$(4.)\quad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0;$$

les deux premiers devant subsister pour deux différentes valeurs entières quelconques r et s entre les limites 1 et n."

En second lieu, en poursuivant la marche proposée, ajoutons aux suppositions précédemment établies, cette autre, qu'aux unités u_1 et u_2 on puisse substituer des quantités $x_1 u_2 + x_2 u_2$ et $y_1 u_1 + y_2 u_2$, qui en sont composées au moyen des coefficients x_1, x_2, y_1, y_2, supposés distincts de zéro, sans que les équations de condition en soient altérées.

En posant, pour abréger,

$$x_1u_1+x_2u_2=a,\quad y_1u_1+y_2u_2=b,$$

on aura:

$$aa = x_1^2u_1u_1+x_2^2u_2u_2+x_1x_2(u_1u_2+u_2u_1),$$
$$ab = x_1y_1u_1u_1+x_2y_2u_2u_2+x_1y_2u_1u_2+x_2y_1u_2u_1,$$

d'où l'on tirera les valeurs des produits bb et ba, en remplaçant l'une par l'autre, les lettres x et y.

D'après le théorème précédent, on a pour équations de condition les quatre systèmes d'équations:

$$(1.)\quad u_1u_2=u_2u_1,\ \ldots$$
$$(2.)\quad u_1u_2+u_2u_1=0,\ \ldots$$
$$(3.)\quad u_1u_1=u_2u_2=u_3u_3=\cdots$$
$$(4.)\quad u_1u_1+u_2u_2+\cdots+u_nu_n=0,$$

qui doivent subsister, ou separés, ou combinés d'une manière quelconque. Il est d'abord évident que le premier de ces systèmes ne sera pas altéré par des substitutions quelconques.

Pour trouver les transformations des autres équations, supposons d'abord, pour plus de simplicité, qu'il en existe plus de deux unités. Alors, en substituant a et b à la place des unités u_1 et u_2, ce qui est permis par hypothèse, on aura, en partant des équations (2.), la suivante:

$$0=ab+ba=2x_1y_1u_1u_1+2x_2y_2u_2u_2+(x_1y_2+x_2y_1)(u_1u_2+u_2u_1);$$

d'où, puisque le dernier terme s'évanouit en vertu de l'équation supposée $u_1u_2+u_2u_1=0$, il vient:

$$x_1y_1u_1u_1+x_2y_2u_2u_2=0.$$

On en tirera, à l'aide du théorème (2.):

$$x_1y_1(u_1u_1-u_3u_3)=0,$$

d'où il suit (x_1 et y_1 étant différents de zéro):

$$u_1u_1=u_3u_3.$$

Donc, on obtiendra par l'échange des indices, permis par hypothèse:

$$u_1u_2=u_2u_2=u_3u_3=\cdots;$$

c'est à dire: les équations (2.) entraîneront avec elles les équations (3.).

Supposons maintenant que les équations (3.) aient lieu. En appliquant à l'équation

$$u_1u_1=u_3u_3$$

la substitution indiquée, on aura:

$$u_3u_3 = aa = x_1^2u_1u_1 + x_2^2u_2u_2 + x_1x_2(u_1u_2 + u_2u_1),$$

d'où, en remplaçant les carrés u_2u_2 et u_3u_3 par le carré équivalent u_1u_1, on trouvera:

$$(x_1^2 + x_2^2 - 1)u_1u_1 + x_1x_2(u_1u_2 + u_2u_1) = 0.$$

En y changeant le signe de l'unité u_1, ce qui est permis par hypothèse, et retranchant l'équation ainsi obtenue de l'équation précédente, on aura:

$$x_1x_2(u_1u_2 + u_2u_1) = 0;$$

d'où, x_1 et x_2 étant distinctes de zéro, il résulte:

$$u_1u_2 + u_2u_1 = 0;$$

c'est à dire: les équations (3.) entraîneront avec elles les équations (2.).

Il est donc évident que, dans l'hypothèse admise, les équations (2. et 3.) ne sauraient subsister séparément, et que, par suite, au lieu de ces deux systèmes d'équations, on en aura un seul, résultant de leur combinaison.

Pour trouver les conditions auxquelles les coefficients x_1, y_1, x_2, y_2 sont assujettis, transformons aussi l'équation (4.) par les substitutions ci-dessus énoncées. On aura:

$$0 = aa + bb + u_3u_3 + \cdots u_nu_n$$
$$= (x_1^2 + y_1^2)u_1u_1 + (x_2^2 + y_2^2)u_2u_2 + (x_1x_2 + y_1y_2)(u_1u_2 + u_2u_1) + u_3u_3 + \cdots u_nu_n.$$

Par suite, en retranchant l'équation (4.), on obtiendra:

$$0 = (x_1^2 + y_1^2 - 1)u_1u_1 + (x_2^2 + y_2^2 - 1)u_2u_2 + (x_1x_2 + y_1y_2)(u_1u_2 + u_2u_1);$$

d'où l'on tirera, à l'aide du théorème (2.), les équations suivantes:

$$(x_1^2 + y_1^2 - 1)(u_1u_1 - u_3u_3) = 0,$$
$$(x_2^2 + y_2^2 - 1)(u_2u_2 - u_3u_3) = 0,$$
$$(x_1x_2 + y_1y_2)(u_1u_2 + u_2u_1) = 0.$$

Par conséquent, si le système combiné des équations (2. et 3.) n'a pas lieu, on aura:

$$x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, \quad x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_1 = 0,$$

d'où l'on tirera:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad y_1 = \mp x_2, \quad y_2 = \pm x_1.$$

C'est à dire: pour que l'on puisse substituer les quantités a et b à la place des unités u_1 et u_2, il faudra que l'on ait:

$$a = x_1u_1 + x_2u_2, \quad b = \mp(x_1u_2 - x_2u_1),$$

$x_1^2 + x_2^2$ étant égal à zéro. Les mêmes équations auraient été obtenues, si nous avions supposé au lieu de l'équation (4.) le système des équations (2. et 3.).

Supposons, pour en donner un exemple palpable, que les unités u_1 et u_2 représentent deux rayons d'un cercle, perpendiculaires l'un à l'autre; alors il est clair, que les quantités a et b représenteront pareillement deux rayons perpendiculaires du même cercle. Par cette raison nous appelons ***changement circulaire*** ou ***transformation circulaire,*** toute transformation, au moyen de laquelle deux quantités quelconques a et b se changent respectivement en $xa + yb$ et en $\mp(xb - ya)$; et admettons que le changement soit appelé ou positif ou négatif, selon que, dans l'expression dernière, on met le signe positif ou le signe négatif. Je dirai de plus qu'un système de quantités est transformé par un changement ***circulaire,*** quand on a appliqué ce changement à deux quelconques d'entre elles.

(Les changements ***circulaires*** s'appliquent convenablement surtout aux théories des diamètres conjugués, des points triples et quadruples, à la théorie de la rotation et à d'autres théories de la géométrie et de la mécanique, où ils servent souvent à faciliter beaucoup les recherches.)

Nous avons trouvé que, dans l'hypothèse admise, les équations de condition se réduisent à trois systèmes d'équations, dont l'un résulte de la combinaison des équations (2. et 3.) du théorème (3.), et que de plus il faut que les transformations des unités soient de la forme circulaire, pour que les trois systèmes d'équations n'en soient pas altérés. Il nous reste à faire voir que, réciproquement, ces transformations circulaires ne sauraient altérer aucun de ces systèmes.

Premièrement, il est évident que les équations (1.) ne seront altérées par aucune transformation des unités.

Secondement, supposons que les équations (2. et 3.) aient lieu simultanément, et admettons qu'on y remplace les unités u_1 et u_2 par des quantités a et b, qui en sont dérivées par un changement circulaire positif, de sorte que l'on ait:

$$a = x_1 u_1 + x_2 u_2, \qquad b = x_1 u_2 - x_2 u_1, \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

L'expression $u_1 u_2 + u_2 u_1$ se changera par là en

$$ab + ba = (x_1^2 - x_2^2)(u_1 u_2 + u_2 u_1) + x_1 x_2 (u_2 u_2 - u_1 u_1).$$

Donc, puisque par hypothèse:

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \qquad u_1 u_1 = u_2 u_2,$$

on aura:

$$ab + ba = 0.$$

De plus, l'expression $u_1 u_r + u_r u_1$ (r étant différent de 1. et 2.) se changera en

$$au_r + u_r a = x_1(u_1 u_r + u_r u_1) + x_2(u_2 u_r + u_r u_2) = 0.$$

La même chose ayant lieu pour l'expression $u_2 u_r + u_r u_2$, il est clair que les équations (2.) subsisteront encore dans l'hypothèse admise.

De l'autre côté, le carré $u_1 u_1$ se changera en

$$aa = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2(u_1 u_2 + u_2 u_1),$$

d'où, puisque $u_1 u_2 + u_2 u_1$ est égal à zéro, et $u_1 u_1 = u_2 u_2$, il vient:

$$aa = (x_1^2 + x_2^2) u_1 u_1,$$

donc, en vertu de l'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$, on a:

$$aa = u_1 u_1.$$

Il est donc évident que le système des équations (2. et 3.), ne sera altéré par aucun changement circulaire positif. Mais comme ces équations ne cessent pas de subsister, quand on y change le *signe* d'une quantité quelconque y contenue, il est clair que le résultat obtenu aura encore lieu par rapport à un changement circulaire *négatif*, et conséquemment par rapport à un changement circulaire *quelconque*.

Troisièmement, supposons que l'équation (4.) ait lieu, et admettons qu'on y applique le changement circulaire ci-dessus adopté; alors l'expression $u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots u_n u_n$ se changera en:

$$aa + bb + u_3 u_3 + \cdots u_n u_n = (x_1^2 + x_2^2)(u_1 u_1 + u_2 u_2) + u_3 u_3 + \cdots u_n u_n.$$

Donc, $x_1^2 + x_2^2$ étant égale à 1, il en résultera:

$$aa + bb + u_3 u_3 + \cdots u_n u_n = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 + \cdots u_n u_n = 0.$$

L'équation (4.) ne sera donc altérée par *aucune* transformation circulaire.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'il y ait plus de deux unités. Or il est facile de s'assurer que pour le cas de deux unités, on pourrait déduire les mêmes conséquences, quoique la marche nécessaire dans ce cas, s'écarte à quelques égards, de celle que nous venons de suivre.

Les résultats, auxquels on est arrivé, peuvent être énoncés par les propositions suivantes.

Théorème 4. „Si d'abord il doit être permis de changer le signe de l'une quelconque des unités relatives, et de remplacer à volonté l'une

par l'autre, et si ensuite il doit y avoir deux quantités, composées de deux unités au moyen de coefficients différents de zéro, et qui, étant substituées à ces unités, satisfont encore aux équations de condition: il est nécessaire que ces équations, pourvu qu'il y en ait, forment un ou plusieurs des trois systèmes suivants:

$$(1.) \quad u_r u_s = u_s u_r,$$

$$(2.) \quad u_r u_s + u_s u_r = 0, \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots u_n u_n,$$

$$(3.) \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots u_n u_n = 0,$$

où les signes u_1, u_2, ... u_n représentent les unités relatives, et où r et s désignent deux quelconques différents des indices 1, 2, ... n."

Théorème 5. „Chacun des systèmes d'équations, établis dans le théorème précédent, continue de subsister, quand les unités sont transformées par des changements circulaires quelconques; et réciproquement: il n'y a en outre aucune transformation des unités qui laisse subsister tous ces systèmes."

Théorème 6. „Il existe huit espèces de multiplication, dont les équations de condition continuent de subsister, quand on assujettit les unités à des transformations circulaires quelconques. On obtient les équations de condition relatives à chacune de ces multiplications, en choisissant entre les trois systèmes, assignés dans le théorème (5.) autant que l'on en voudra."

Nous désignons les multiplications obtenues ici sous le nom de *multiplications circulaires,* tandis que les multiplications établies par les théorèmes (1. 2. 3.) pourraient être appelées *multiplications symétriques.* Cependant il faut faire observer que les *huit* espèces de la multiplication *circulaire* font partie des *seize* espèces de la multiplication *symétrique,* en sorte que parmi celles-ci il n'y a que *huit* espèces, qui ne sont pas en même temps circulaires.

En troisième lieu, supposons qu'il soit permis de substituer aux unités, des quantités qui en sont composées à volonté, sans que les équations de condition en soient altérées. Il est d'abord évident que les suppositions établies jusqu'ici, auront encore lieu dans ce cas. On peut donc recourir aux systèmes d'équations obtenus ci-dessus. Reprenons les quatre systèmes d'équations relatifs à la multiplication symétrique, savoir:

$$(1.) \quad u_1 u_2 = u_2 u_1,$$

$$(2.) \quad u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0,$$

$$(3.) \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots$$

$$(4.) \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0,$$

et substituons à la place de l'unité u_1, la quantité a, supposée égale au polynôme $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots$, dont les coefficients x_1, x_2, ... sont arbitraires. Alors, en partant de l'équation (1.), on aura:

$$a u_2 = x_1 u_1 u_2 + x_2 u_2 u_2 + x_3 u_3 u_2 + \cdots$$

d'où, en échangeant l'ordre des unités dans chaque terme du second membre (ce qui est permis en vertu de l'équation (1.)), il résulte:

$$\begin{aligned} a u_2 &= x_1 u_2 u_1 + x_2 u_2 u_2 + x_3 u_2 u_3 + \cdots \\ &= u_2 (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + \cdots) \\ &= u_2 a, \end{aligned}$$

c'est à dire: l'équation (1.) ne cesse pas de subsister, quand on y remplace l'une quelconque des unités par une quantité composée arbitrairement de toutes les unités. Puis, en partant de l'équation (2.), on obtiendra par la même substitution:

$$a u_2 + u_2 a = x_1 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + 2 x_2 u_2 u_2 + x_3 (u_1 u_3 + u_3 u_1) + \cdots,$$

et comme tous les termes du second membre, excepté seulement le terme $2 x_2 u_2 u_2$, doivent s'évanouir en vertu des équations (2.), il faudra, que ce terme $2 x_2 u_2 u_2$ s'évanouisse pareillement, pour que l'équation (2.) puisse subsister encore après la substitution. Donc, puisque x_2 peut être supposé différent de zéro, on aura $u_2 u_2 = 0$; et par l'échange des indices:

$$0 = u_1 u_2 = u_2 u_2 = \cdots.$$

Or il est évident que ces équations résulteraient aussi de la combinaison des équations (3. et 4.). Par suite nous en conclurons que dans l'hypothèse admise, les équations (2.) entraîneront avec elles les équations (3. et 4.). En partant maintenant des équations (3.), on aura:

$$a a = x_1^2 u_1 u_1 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + x_2^2 u_2 u_2 + \cdots.$$

Or d'après l'hypothèse, le carré $a a$ doit être égal encore au carré $u_2 u_2$. On aura donc:

$$u_2 u_2 = x_1^2 u_1 u_1 + x_2^2 u_2 u_2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + \cdots,$$

et puisque cette équation doit subsister, quelles que soient les valeurs des coefficients x_1, x_2, ..., on aura séparément:

$$u_1 u_1 = 0, \quad u_2 u_2 = 0, \quad u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \quad \text{etc.};$$

c'est à dire: les équations (3.) entraîneront les équations (2. et 4.).

En partant enfin de l'équation (4.) on aura:

$$0 = a^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$
$$= x_1^2 u_1^2 + (x_2^2 + 1) u_2^2 + \cdots (x_n^2 + 1) u_n^2 + x_1 x_2 (u_1 u_2 + u_2 u_1) + \cdots,$$

d'où l'on tirera:

$$u_1^2 = u_2^2 = \cdots = 0,$$
$$u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0, \text{ etc.}$$

En combinant les résultats, trouvés dans l'hypothèse établie, on peut énoncer la proposition suivante.

Théorème 7. „S'il est permis de remplacer chaque unité, renfermée dans les équations de condition, par une quantité composée arbitrairement d'unités, sans que ces équations cessent de subsister: il faudra, que les équations de condition, pourvu qu'il y en ait, forment un des deux systémes:

(1.) $u_r u_s = u_s u_r$,

(2.) $u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots = 0$, $u_1 u_2 = -u_2 u_1$, ...,

ou bien qu'elles en soient combinées."

Nous désignons les multiplications établies dans ce théorème sous le nom de *multiplications linéales*, parceque, étant appliquées à la Géométrie, elles s'effectuent par des constructions *linéales*, sans qu'il faudrait recourir au *cercle*. Il est évident qu'il y aura, pour parler exactement, quatre espèces de multiplication linéale, et qu'il y restera également quatre multiplications circulaires, qui ne sont pas en même temps linéales. Cependant parmi les quatre multiplications linéales il y en a une que l'on peut rejeter entièrement, parceque tous les produits en seraient égaux à zéro. Ce serait celle où les deux systèmes d'équations, établis ci-dessus, auraient lieu conjointement. De même, la multiplication qui n'est assujettie à aucune condition, peut être rejetée, parcequ'elle ne paraît pas fournir des applications remarquables. Il nous restera donc deux multiplications linéales, dont l'une est assujettie aux équations (1.) et l'autre aux équations (2.). L'une et l'autre est de la plus grande importance, tant pour l'analyse que pour la géométrie, la mécanique et la physique en général; l'une et l'autre peut d'ailleurs être étendue sans aucune difficulté à autant de facteurs que l'on voudra. La première, qui jouit de la propriété, que le produit est indépendant de l'ordre dans lequel se suivent les facteurs, est identique, quant aux opérations, à la multiplication employée dans l'analyse algébrique, et sera appelée pour cela *multiplication*

algébrique; l'autre est celle que j'ai appelée ***multiplication extérieure***, et qui fait l'objet principal de mon ouvrage cité plus haut. C'est par elle qu'on est en état d'effectuer avec la plus grande facilité l'élimination des inconnues entre des équations, tant linéaires que non-linéaires, et de resoudre tout à coup un grand nombre de problèmes de géométrie, ainsi que de mécanique, difficiles à resoudre autrement; comme je l'ai fait voir déjà en 1844 et comme Mrs. ***Cauchy*** et ***de Saint-Venant*** l'ont proposé récemment, sans y ajouter rien de nouveau. Cependant, ayant publié plusieurs applications de cette multiplication non-seulement dans l'ouvrage cité, mais aussi dans le journal de M. ***Crelle*** (Tomes 31, 36, 42, 44) je peux me dispenser d'entrer dans plus de détail à ce sujet.

A l'égard de la multiplication algébrique, les règles d'opération en sont connues; mais il n'en est pas de même quant à l'application de cette multiplication à des quantités qui ne sont pas tout à fait algébriques; par exemple, s'il s'agit de multiplier algébriquement, non les grandeurs des lignes, mais les lignes elles-mêmes, données en grandeur et direction, ou bien des points quelconques. Pour mettre en évidence l'avantage de cette multiplication, nous remarquerons, par exemple que, les lettres $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ désignant neuf points quelconques d'une courbe du troisième ordre, et x un dixième point de cette courbe, on obtiendra pour équation de cette courbe celle-ci:

$$a^3.b^3.c^3.d^3.e^3f^3.g^3.h^3.i^3.x^3 = 0:$$

équation, dans laquelle chaque exposant se rapporte à la multiplication algébrique, en sorte que la puissance $a^3 = aaa$ désigne un produit algébrique de trois facteurs, dont chacun est égal au point a, et ainsi de suite, et dans laquelle les diverses puissances sont multipliées l'une par l'autre au moyen de la multiplication extérieure. Une proposition analogue aura lieu par rapport à toute courbe algébrique. De plus, à l'aide de la multiplication algébrique, appliquée à des quantités extensives, on peut réduire toute fonction de plusieurs variables à une fonction d'une seule variable, et appliquer directement la plupart des théorèmes démontrés pour des fonctions d'une seule variable, à des fonctions d'un nombre quelconque de variables. Enfin, par cette multiplication, on est en état d'appliquer immédiatement tous les théorèmes analytiques aux fonctions de quantités purement géométriques; comme de points etc.

Parmi les quatre multiplications, proprement dites ***circulaires,*** il y en a deux qui sont d'un grand usage dans l'analyse, dans la géométrie, et surtout dans la mécanique. Ce sont celles, dont les produits sont indépendants de

l'ordre des facteurs, et dont l'une d'ailleurs est assujettie aux équations (2.) du théorème (4.), et l'autre à l'équation (4) du même théorème. La première est déterminée par les équations

$$u_r u_s = 0, \text{ où l'index } r \text{ est différent de } s,$$
$$\text{et} \quad u_1 u_1 = u_2 u_2 = \cdots$$

Je l'ai appelée ***multiplication intérieure,*** (Voyez „***Ausdehnungslehre***" pag. XI, et surtout „***Geometrische Analyse,*** gekrönte Preisschrift, Leipz. 1847." pag. 17—57, où j'ai donné des applications à la géométrie et à la mécanique.) en voulant exprimer par ce mot la rapport particulier qui existe entre elle et la multiplication extérieure. Pour trouver ce rapport, prenons pour unités trois lignes perpendiculaires et égales en grandeur l'une à l'autre, et projetons une ligne quelconque, désignée par la lettre a sur deux autres lignes b et c, supposées perpendiculaires l'une à l'autre; soient b_1 et c_1 ces projections: alors il est facile de s'assurer que le produit ***intérieur*** des deux lignes a et b sera égal au produit ab_1, tandis que le produit ***extérieur*** des mêmes lignes sera égal au produit ac_1; donc, parceque les lignes a et b_1 sont situées l'une ***dans*** l'autre, et que les lignes a et c_1 sont situées l'une ***au dehors*** de l'autre, il sera convenable de désigner ces produits sous les noms que je leur ai données.

L'autre multiplication circulaire est déterminée par les équations

$$u_r u_s = u_s u_r \quad \text{et} \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n = 0.$$

Cette multiplication remarquable est représentée, si l'on ne suppose que deux unités relatives, par la multiplication de deux quantités ***complexes,*** telles que $a+b\sqrt{-1}$ et $c+d\sqrt{-1}$. En effet, il sera permis de regarder l'unité absolue et l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ comme des unités relatives, pourvu que l'on n'en compose des quantités qu'au moyen de coefficients réels. Alors, en désignant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ par la lettre i, on aura

$$1 + i^2 = 0,$$

et le produit sera en outre indépendant de l'ordre des facteurs. Donc les équations

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 \quad \text{et} \quad u_1 u_1 + u_2 u_2 = 0$$

auront lieu au cas où u_1 est $=1$ et $u_2 = \sqrt{-1}$. Pour cette raison, on pourrait désigner cette multiplication sous le nom de ***multiplication complexe.***

Il est bon de remarquer que l'une ou l'autre de ces multiplications circulaires s'appliquera en géométrie et en mécanique à tous les problèmes qui se rapportent d'une manière quelconque au ***cercle,*** ou à ***l'angle,*** ou à la ***grandeur des lignes,*** séparée de leur direction, et aux aires des surfaces situées dans l'espace. Et il sera facile de voir que dans tous ces cas, l'emploi des multiplications linéales ne suffira pas pour résoudre les problèmes.

Il nous resterait encore à discuter les huit multiplications symétriques qui ne sont pas en même temps circulaires. Mais nous remarquons que ces multiplications ne sont d'aucun usage, ni dans l'analyse, ni dans la géométrie, et que nous n'en aurions fait aucune mention, s'il ne nous eût pas paru convenable, d'en partir, pour établir les divers genres de la multiplication circulaire.

Stettin le 5 Février 1854.

10.

Mémoire sur la résolution de l'équation indéterminée $ax + bky = z(x^2 + ky^2)$.

(Par Mr. *Oltramare*, prof. de math. supér. à l'académie des sciences de Genève.)

§. 1.

En désignant par k un nombre entier plus grand que zéro, il est facile de reconnaître que l'équation proposée

$$ax + bky = z(x^2 + ky^2)$$

(dans laquelle a et b sont des nombres entiers quelconques) admet une infinité de solutions.

C'est ainsi qu'en posant $z = 0$, $x = \pm bkt$, $y = \mp at$, en désignant par t un nombre entier indéterminé, on obtient une multitude de valeurs qui satisfont à l'équation. Il en sera de même en posant $y = 0$, $x = 0$, et en prenant pour z une valeur arbitraire. On pourrait encore supposer $x = 0$, et déterminer y et z par la relation $b = zy$, ou bien supposer $y = 0$ et déterminer x et z par la relation $a = zx$, ce qui donnera un nombre de solutions plus ou moins grand, selon que b et a contiendront plus ou moins de facteurs.

Nous nous proposons ici de considérer seulement les cas dans lesquels aucune des indéterminées n'est nulle, et pour lesquels l'équation proposée conserve sa forme particulière. Nous laisserons donc de côté:

1°. Les solutions pour lesquelles les indéterminées x et y ne sont pas premières entr'elles; car en supposant $x = hx'$ et $y = hy'$, nous aurions l'équation

$$ax' + bky' = hz(x'^2 + ky'^2):$$

équation d'une forme différente de l'équation proposée.

2°. Les solutions dans lesquelles l'indéterminée x n'est pas première avec la quantité k; car en supposant $x = hx'$ et $k = hk'$, nous aurions l'équation

$$ax' + bk'y = hz(hx'^2 + k'y^2),$$

dont la forme diffère de celle de l'équation proposée.

En changeant convenablement le signe des indéterminées, si cela est nécessaire, on peut, sans altérer la généralité de l'équation proposée, supposer a et b des nombres positifs; on peut en outre, regarder ces nombres comme des nombres premiers entr'eux; car s'ils avaient un facteur commun h, de sorte que $a=ha'$ et $b=hb'$, en posant $z=bz'$, on trouverait l'équation

$$a'x+b'ky = z'(x^2+ky^2),$$

qui est de la même forme que l'équation proposée, et dans laquelle a' et b' sont premiers entr'eux.

§. 2.

Théorème. ***Si les valeurs*** $x=x'$, $y=y'$ ***donnent une solution de l'équation proposée***

$$ax+bky = z(x^2+ky^2),$$

le nombre $x'^2+ky'^2$ ***devra figurer parmi les diviseurs du nombre*** a^2+kb^2.

En substituant dans l'équation proposée pour x et y leurs valeurs x' et y', on obtient la congruence

$$ax'+bky' \equiv 0 \pmod{x'^2+ky'^2};$$

comme d'ailleurs on a identiquement,

$$x'^2+ky'^2 \equiv 0 \pmod{x'^2+ky'^2},$$

il en résultera:

$$x'^2(a^2+kb^2) \equiv 0 \pmod{x'^2+ky'^2}.$$

Comme x' est par hypothèse premier avec k et y', il en résultera que a^2+kb^2 sera divisible par $x'^2+ky'^2$.

La réciproque n'est pas vraie. En d'autres termes: si $x'^2+ky'^2$ est un diviseur de a^2+kb^2, en posant $x=\pm x'$ et $y=\pm y'$, on n'aura pas nécessairement une solution de l'équation proposée.

Nous désignerons sous le nom de ***facteur*** ou ***diviseur valable*** tout facteur de a^2+kb^2 qui, mis sous la forme $x'^2+ky'^2$, donne une solution de l'équation proposée, en posant $x=\pm x'$, $y=\pm y'$; et nous désignerons sous le nom de ***facteurs*** ou ***diviseurs non valables***, ceux qui ne satisfont pas à cette condition.

§. 3.

Legendre a démontré dans son „Essai sur la théorie des nombres" que si l'on a:

$$N = \alpha^n \beta^{n'} \gamma^{n''} \ldots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant des nombres premiers de la forme p^2+kq^2, le nombre N sera autant de fois de la forme a^2+kb^2 qu'il y a d'unités dans le produit

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n'+1)(n''+1)\ldots,$$

où $\frac{1}{2}$ devra être comptée pour l'unité, dans le cas où le produit $(n+1)(n'+1)(n''+1)\ldots$, est impair.

Il serait important pour le sujet qui nous occupe, de déterminer les valeurs de a et b qui répondent à toutes ces manières de décomposer le nombre $N=a^2+kb^2$; mais nous examinerons seulement le cas particulier où $n=n'=1$, et où N est composé simplement de deux facteurs premiers $\alpha=x'^2+ky'^2$ et $\beta=x''^2+ky''^2$; il ne serait d'ailleurs pas difficile de déduire de ce cas le cas général.

Posons à cet effet:

$$N=a^2+kb^2=(x'^2+ky'^2)(x''^2+ky''^2),$$

et cherchons les valeurs de a et b qui satisfont à cette identité.

Quelles que soient ces valeurs, nous pouvons poser, en désignant par m, n, p et q des nombres indéterminés:

$$\begin{aligned} a &= mx'+ny', \\ b &= px'+qy'. \end{aligned}$$

En mettant ces valeurs dans la relation précédente, nous pourrons reconnaître qu'elle est satisfaite en déterminant les nombres m, n, p et q de manière à obtenir:

$$\begin{aligned} mn+qpk &= 0, \\ m^2+kp^2 &= x''^2+ky''^2, \\ n^2+kq^2 &= (x''^2+ky''^2)k; \end{aligned}$$

mais comme $x''^2+ky''^2$ est un nombre premier qui, comme on sait, ne peut être mis de deux manières différentes sous cette forme, il faut que l'on ait:

$$m=\pm x'', \quad p=\pm y'', \quad n=\mp ky'', \quad q=\pm x''.$$

Si nous remarquons que les nombres a et b peuvent être positifs ou négatifs, nous aurons, en rejetant les solutions négatives, les deux systèmes de valeurs:

$$\left.\begin{aligned} a &= x'x''+ky'y'' \\ b &= \pm(y'x''-x'y'') \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \pm(x'x''-ky'y'') \\ b &= x'y''+y'x'' \end{aligned}\right\}$$

§. 4.

Théorème. ***Si les coefficients qui entrent dans l'equation proposée***

$$ax+bky = z(x^2+ky^2),$$

sont tels que le nombre a^2+kb^2 ***soit le produit de tant de facteurs premiers qu'on voudra, de la même forme, égaux ou inégaux entr'eux, chacun de ces facteurs premiers sera un facteur valable.***

Si nous représentons par $x'^2+ky'^2$ un des facteurs premiers de a^2+kb^2, le nombre entier $\frac{a^2+kb^2}{x'^2+ky'^2}$ pourra être mis sous la forme de u^2+kv^2, de plusieurs manières différentes (§. 3).

Parmi ces diverses formes du nombre $\frac{a^2+kb^2}{x'^2+ky'^2}$, choisissons celle pour laquelle on a en même temps avec

$$a^2+kb^2 = (u_1^2+kv_1^2)(x'^2+ky'^2),$$

l'un ou l'autre des deux systèmes d'équations:

$$\left.\begin{aligned} a &= u_1x'+kv_1y' \\ b &= \mp(u_1y'-v_1x') \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} a &= \pm(u_1x'-kv_1y') \\ b &= v_1x'+u_1y' \end{aligned}\right\},$$

qui donnent pour u_1 et v_1 le système unique de valeurs

$$u_1 = \pm\left(\frac{ax'\mp bky'}{x'^2+ky'^2}\right), \qquad v_1 = \pm\left(\frac{ay'\pm bx'}{x'^2+ky'^2}\right),$$

dans lesquelles on prendra le signe de b de manière à rendre le numérateur exactement divisible par le dénominateur, et le signe du terme de telle sorte que les valeurs de u_1 et v_1 soient positives.

En remplaçant dans l'équation proposée, a et b par les valeurs précédentes, nous reconnaîtrons que l'équation est satisfaite pour des valeurs entières de x, y et z; ce qui établit que le facteur premier $x'^2+ky'^2$ est ***valable***.

En opérant la substitution, nous obtenons les solutions suivantes:

$$(A.)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
1^\circ. & \text{Si } \left.\begin{aligned} a &= u_1x'+kv_1y' \\ b &= u_1y'-v_1x' \end{aligned}\right\} & \left.\begin{aligned} x &= \pm x' \\ x &= \pm u_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} y &= \pm y' \\ y &= \mp v_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} z &= \pm u_1 \\ z &= \pm x' \end{aligned}\right. \\
2^\circ. & \text{Si } \left.\begin{aligned} a &= u_1x'+kv_1y' \\ b &= v_1x'-u_1y' \end{aligned}\right\} & \left.\begin{aligned} x &= \pm x' \\ x &= \pm u_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} y &= \mp y' \\ y &= \pm v_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} z &= \pm u_1 \\ z &= \pm x' \end{aligned}\right. \\
3^\circ. & \text{Si } \left.\begin{aligned} a &= u_1x'-kv_1y' \\ b &= u_1y'+v_1x' \end{aligned}\right\} & \left.\begin{aligned} x &= \pm x' \\ x &= \pm u_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} y &= \pm y' \\ y &= \pm v_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} z &= \pm u_1 \\ z &= \pm x' \end{aligned}\right. \\
4^\circ. & \text{Si } \left.\begin{aligned} a &= kv_1y-u_1x' \\ b &= u_1y'+v_1x' \end{aligned}\right\} & \left.\begin{aligned} x &= \pm x' \\ x &= \pm u_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} y &= \mp y' \\ y &= \mp v_1 \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} z &= \mp u_1 \\ z &= \mp x'. \end{aligned}\right.
\end{array}\right.$$

Remarque. Si a^2+kb^2 était un nombre premier, il serait lui-même un facteur *valable,* ainsi que $1^2+k.0^2$; car alors on aurait

$$a^2+kb^2 = (a^2+kb^2)(1^2+k.0^2),$$

et l'on aurait

$$x'=a, \quad y'=b, \quad u_1=1, \quad v_1=0.$$

§. 5.

Voici encore un théorème qui n'est qu'une conséquence de celui-là.

Théorème. Si les coefficients a et b qui entrent dans l'équation proposée

$$ax+bky = z(x^2+ky^2),$$

sont tels que le nombre a^2+kb^2 soit le produit de deux facteurs de la même forme, de sorte que

$$a^2+kb^2 = (u^2+kv^2)(x'^2+ky'^2),$$

dont l'un $x'^2+ky'^2$ est valable: l'autre facteur u^2+kv^2 sera également valable, en posant

$$u = \frac{ax' \mp bky'}{x'^2+ky'^2},$$

$$v = \frac{ay' \mp bx'}{x'^2+ky'^2},$$

et en choisissant le signe de b de manière à ce que le numérateur soit divisible par le dénominateur.

§. 6.

Théorème. Si les coefficients a et b qui entrent dans l'équation proposée

$$ax+bky = z(x^2+ky^2),$$

sont tels que le nombre a^2+kb^2 ait deux diviseurs valables de la forme $x'^2+ky'^2$ et $x''^2+ky''^2$: le produit de ces deux diviseurs, mis sous la forme $x_1^2+ky_1^2$, en posant:

$$x_1 = x'x'' - ky'y'',$$
$$y_1 = x'y'' + y'x'',$$

donnera un diviseur également valable.

Il est d'abord facile de voir que les valeurs $x_1=x'x''-ky'y''$ et $y_1=x'y''+y'x''$ donnent

$$x_1^2+ky^2 = (x'^2+ky'^2)(x''^2+ky''^2).$$

Comme d'un autre côté les deux diviseurs $x'^2+ky'^2$ et $x''^2+ky''^2$ sont, par hypothèse, deux diviseurs valables, nous aurons:

$$(1.) \quad ax'+bky' = z'(x'^2+ky'^2),$$
$$(2.) \quad ax''+bky'' = z''(x''^2+ky''^2).$$

La question est donc, de reconnaître que l'on a également:

$$ax_1+bky_1 = z_1(x_1^2+ky_1^2),$$

ou, ce qui revient au même, que ax_1+bky_1 est divisible par $x_1^2+ky_1^2$.

Multipliant membre à membre les équations (1. et 2.), on obtient

$$a^2x'x''+abky'x''+abkx'y''+b^2k^2y'y'' = z'z''(x_1^2+ky_1^2);$$

mais comme

$$x'x'' = x_1+ky'y'',$$
$$y'x'' = y_1-x'y'',$$

il en résultera, en posant $a^2+kb^2=A(x_1^2+ky_1^2)$:

$$a(ax_1+bky_1) = (z'z''-kAy'y'')(x_1^2+ky_1^2).$$

Comme a ne peut avoir aucun diviseur commun avec $x_1^2+ky_1^2$, il résulte de cette équation que ax_1+bky_1 est bien divisible par $x_1^2+ky_1^2$.

Faisons remarquer ici que le théorème n'est vrai qu'autant que le produit des deux diviseurs $(x'^2+ky'^2)(x''^2+ky''^2)$ est un facteur de a^2+kb^2.

§. 7.

Théorème. *Tout diviseur de* a^2+kb^2 *ne peut être mis sous la forme de diviseur valable que d'une seule manière.*

Lemme. *Si un nombre* N *peut être mis sous la forme* u^2+kv^2 *de deux manières différentes, de sorte que l'on ait:*

$$N = u_1^2+kv_1^2,$$
$$N = u_2^2+kv_2^2,$$

le nombre N' *que l'on formera en prenant*

$$N' = u_1u_2+kv_1v_2,$$

sera plus petit que N*, et par conséquent ne sera pas divisible par* N.

Cette proposition revient à démontrer que:

$$(u_1^2+kv_1^2)(u_2^2+kv_2^2) > (u_1u_2+kv_1v_2)^2.$$

En développant et en simplifiant, on obtient:

$$v_1^2u_2^2+u_1^2v_2^2 > 2u_1u_2v_1v_2$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$(v_1u_2-u_1v_2)^2>0.$$

Cela posé, concevons qu'un diviseur de a^2+kb^2 puisse être mis sous la forme de facteur *valable* des deux manières différentes $u_1+kv_1^2$ et $u_2+kv_2^2$. Nous aurons:

$$\begin{aligned} u_1^2+kv_1^2 &= u_2^2+kv_2^2,\\ au_1+bkv_1 &= z_1(u_1^2+kv_2^2),\\ au_2+bkv_2 &= z_2(u_2^2+kv_2^2), \end{aligned}$$

et par conséquent on pourra écrire les congruences suivantes:

$$\begin{aligned} &(1.) \quad au_1+bkv_1 \equiv 0 \pmod{u_1^2+kv_1^2},\\ &(2.) \quad au_2+bkv_2 \equiv 0 \pmod{u_1^2+kv_1^2},\\ &(3.) \quad a^2+kb^2 \equiv 0 \pmod{u_1^2+kv_1^2}. \end{aligned}$$

De ces congruences on déduit aisément:

$$\begin{aligned} bu_1 &\equiv av_1 \pmod{u_1^2+kv_1^2},\\ bu_2 &\equiv av_2 \pmod{u_1^2+kv_1^2}. \end{aligned}$$

Multipliant ces deux congruences, et ayant égard à la congruence (3.), on a:

$$u_1u_2+kv_1v_2 \equiv 0 \pmod{u_1^2+kv_1^2}:$$

congruence impossible en vertu de notre lemme.

§. 8.

Des théorèmes que nous venons de démontrer, il résulte la proposition suivante.

Théorème général. ***Si l'on considère l'équation***

$$ax+bky = z(x^2+ky^2):$$

tout diviseur de a^2+kb^2 ***de la même forme peut être mis sous la forme*** $x_1^2+ky_1^2$ ***qui en fait un diviseur valable, et il ne peut être mis sous cette forme valable que d'une seule manière.***

Si donc on veut déterminer toutes les solutions de l'équation proposée, dans les suppositions que nous avons adoptées relativement aux valeurs des indéterminées, on cherchera tous les facteurs de a^2+kb^2 de la même forme, qui, rangés par ordre de grandeur, pourront être représentés par

$$1,\ m,\ n,\ \ldots\ n',\ m',\ a^2+kb^2.$$

Comme le produit de deux facteurs à égale distance des extrêmes, est égal à a^2+kb^2, on aura pour chaque couple, mis sous la forme valable:

$$a^2+kb^2 = (u_1^2+kv_1^2)(x'^2+ky'^2).$$

Puis, au moyen des formules (*A*. du §. 4.) on déterminera les solutions qui répondent à ces facteurs. Nous aurons ainsi toutes les solutions de l'équation proposée; car, une solution doit nécessairement fournir un facteur valable, et notre décomposition met en évidence tous ces facteurs.

Nous voyons ainsi que, si, dans l'équation proposée, nous rejetons les solutions qui donnent, pour les indéterminées, des valeurs nulles, ou pour lesquelles x et y ou x et k ont un facteur commun, le nombre total des autres solutions sera égal, en vertu des formules (*A*. du §. 4.), à autant de fois les solutions qu'on pourra décomposer le nombre a^2+kb^2 en produits de deux facteurs différents de la même forme.

§. 9.

On peut facilement déduire de la résolution de l'équation

$$(a.) \qquad ax+bky = z(x^2+ky^2),$$

les solutions de l'équation indéterminée

$$(b.) \qquad ax+bky = x^3+ky^2x;$$

car les solutions de cette équation sont les mêmes que celles de l'équation (*a*.), pour lesquelles $z=x$.

Nous reconnaissons ainsi que, pour que l'équation (*b*.) admette des solutions, il faut qu'on puisse mettre le nombre a^2+kb^2 sous la forme du produit de deux facteurs valables

$$(x'^2+kv_1^2)(x'^2+ky'^2).$$

Lorsque cette décomposition est effectuée, on a, en vertu des équations (*A*. du §. 4.):

$$1^\circ.\quad \begin{matrix} x=\pm x' & y=\pm y', \\ x=\pm x' & y=\mp v \end{matrix} \quad \text{si} \begin{cases} a = x'^2+kv_1y' \\ b = x'(y'-v_1) \end{cases}$$

$$2^\circ.\quad \begin{matrix} x=\pm x' & y=\mp y', \\ x=\pm x' & y=\pm v_1 \end{matrix} \quad \text{si} \begin{cases} a = x'^2+kv_1y' \\ b = x'(v_1-y') \end{cases}$$

$$3^\circ.\quad \begin{matrix} x=\pm x' & y=\pm y', \\ x=\pm x' & y=\pm v_1 \end{matrix} \quad \text{si} \begin{cases} a = x'^2-kv_1y' \\ b = x'(y'+v_1) \end{cases}$$

$$4^\circ.\quad \text{aucune solution,} \quad \text{si} \begin{cases} a = kv_1y'-x'^2 \\ b = x'(y'+v_1) \end{cases}$$

pour l'ensemble des solutions.

§. 10.

Si nous considérons l'expression z^2+kc^2, dans laquelle z et c sont des nombres quelconques, et $k>0$: deux facteurs de cette expression pourront généralement être mis d'une ou de plusieurs manières sous la forme u^2+kw^2; mais parmi ces différentes manières il en existera une, pour laquelle, en posant

$$z^2+kc^2 = (a^2+kb^2)(x_1^2+ky_1^2),$$

les valeurs de z et c seront données par les formules

$$\left.\begin{aligned} z &= ax_1+kby_1 \\ c &= \pm(bx_1-ay_1) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \pm(ax_1-kby_1) \\ c &= ay_1+bx_1 \end{aligned}\right\};$$

par conséquent la valeur de c peut être écrite:

$$(1.) \qquad c = ax+by,$$

pourvu qu'on y fasse $x=\pm y_1$, $y=\pm x_1$, sans rien préjuger sur les signes.

Il résulte de là que si l'on propose de résoudre l'équation (1.), on formera l'expression

$$\frac{z^2+kc^2}{a^2+kb^2};$$

puis lorsqu'on aura déterminé z de manière à ce que la division puisse s'effectuer, le quotient, mis sous la forme de u^2+kw^2 de toutes les manières possibles, donnera pour une certaine décomposition:

$$x=\pm w, \qquad y=\pm u,$$

comme solution de l'équation proposée.

Genève 23 Mars 1853.

11.

Note sur les relations qui existent entre les formes linéaires et les formes quadratiques des nombres premiers.

(Par M. *Oltramare*, prof. de mathématiques sup. à l'académie des sciences de Genève.)

Legendre a établi dans son essai sur la théorie des nombres, plusieurs théorèmes remarquables qui relient les formes quadratiques des nombres premiers avec leurs formes linéaires. Notre but, dans cette note, est de donner quelque extension à ces sortes de propositions, et de faire voir, en particulier, dans quel cas un nombre premier proposé, ou l'un de ses multiples, peut ou ne peut pas être mis sous les formes q^2+kp^2 et $q-kp^2$ (k représentant un nombre entier quelconque que l'on peut supposer ne contenir comme facteur aucun carré parfait).

§. 1.

Pour parvenir aux résultats que nous cherchons, nous déterminerons d'abord les valeurs de z et v qui rendent rationnelle et entière l'expression

$$(a.) \qquad z = \sqrt{(av+b)}.$$

Or il est facile de voir que l'on satisfait à cette équation en prenant

$$(1.) \qquad v = g\{(y_1-qt)^2+k(x_1+pt)^2\},$$

g, k, m, p et q étant des nombres entiers qui satisfont aux équations

$$(2.) \qquad b = -km^2,$$

$$(3.) \qquad ag = q^2+kp^2,$$

et x_1+pt et y_1-qt représentant l'ensemble des solutions de l'équation indéterminée du premier degré

$$(4.) \quad qx+py = m.$$

En effet, en substituant la valeur de v donnée par l'équation (1.) dans l'équation proposée, et en remarquant que

$$qx_1+py_1 = m,$$

on obtient pour z la valeur rationnelle et entière:

$$(5.) \qquad z = \pm(qy_1-kpx_1-at).$$

On comprend aisément que, pour connaître toutes les solutions que fournit l'équation (1.), il faut:

1°. Décomposer b sous la forme de $-km^2$ de toutes les manières possibles.

2°. Mettre le nombre a, et chacun de ses multiples, sous la forme q^2+kp^2, et cela de toutes les manières possibles. Il répondra, à chacune de ces formes de b et ag, combinées deux à deux, une équation analogue à l'équation (4.), et par suite, lorsque cette équation indéterminée admettra des solutions, on obtiendra un système de valeurs de v analogue à celui qui est donné par l'équation (1.).

§. 2.

Il est important de savoir si le mode de solution que nous venons de faire connaître, renferme réellement tous les systèmes de valeurs qui peuvent satisfaire à l'équation proposée.

Il est d'abord facile de voir que si le nombre a, ou l'un de ses multiples ag, peut se mettre sous la forme q^2+kp^2, les équations (1. et 5.) renfermeront toutes les solutions de l'équation proposée.

En effet, soient z et v une solution donnée par les équations (1. et 5.), et z' et v' une solution nouvelle qui n'ést pas comprise dans ces formules, nous aurons simultanément:

$$z^2 = av+b,$$
$$z'^2 = av'+b,$$

et par conséquent:

$$z^2-z'^2 = a(v-v').$$

En substituant pour z sa valeur donnée par l'équation (5.), on a

$$(qy_1-kpx_1)^2-z'^2 \equiv 0 \pmod{a},$$

et par conséquent,

$$z' \equiv \pm(qy_1-kpx_1) \pmod{a}.$$

Il résulte de là que z' ne peut différer de z que par un multiple de a; donc z' est compris dans la formule (5.) qui contient toutes les solutions qui ne diffèrent que par un multiple de a. Si, en second lieu, nous supposons que a, ni aucun de ces multiples, ne puisse affecter la forme q^2+kp^2, il est aisé de reconnaître que l'équation (a.) n'admet aucune solution.

On sait, en effet, par la théorie de ***Legendre*** (§. 138.) que tout diviseur de la forme $z^2\pm km^2$ peut être représenté par la formule $gy^2+2hyz\pm rz^2$,

dans laquelle on a $gr \mp h^2 = k$. Maintenant, en remarquant que l'on a identiquement:

$$g(gy^2 + 2hyz \pm rz^2) = (gy + hz)^2 - (h^2 \mp gr)z^2 = (gy + hz)^2 \pm kz^2,$$

on pourra dire que: (*Legendre* §. 186)

Tout diviseur de la formule $z^2 \pm km^2$ est lui-même de la forme $q^2 \pm kp^2$, ou du moins qu'il peut devenir de cette forme en le multipliant par un certain facteur g. (g étant plus petit que $2\sqrt{\frac{1}{3}k}$, s'il s'agit de la formule $z^2 + km^2$, et tout au plus égal à k, si l'on considère la forme $z^2 - km^2$.)

Cela posé, si l'on met l'équation (*a.*) sous la forme

$$\frac{z^2 \mp k}{g\mu} = v',$$

il est facile de voir que si μ est tel que μg ne puisse prendre la forme $q^2 \pm kp^2$, l'équation précédente est impossible.

§. 3.

Théorème I. Tout nombre premier μ de la forme $4\alpha m + R$ (α étant également un nombre premier) ***peut lui-même, ou l'un de ses multiples $g\mu$, être mis sous les deux formes $q^2 + \alpha p^2$ et $q^2 - \alpha p^2$, si le nombre R est de la forme $4n+1$ et de plus racine paire du nombre premier α.***

La démonstration de ce théorème repose sur la proposition que nous avons établie (Voyez ce journal Tome XLV page 305), pour reconnaître si un nombre premier α est racine paire ou impaire d'un nombre premier μ de la forme $4\alpha m + R$.

Il est facile de voir, à l'aide du théorème que nous venons de rappeler que, si R est racine paire du nombre premier α, et de plus un nombre de la forme $4n+1$, le nombre μ sera lui-même de la forme $4p+1$; et par suite les deux nombres α et $-\alpha$, qui sont racines complémentaires, seront des racines paires de μ. Il résulte de là que l'on pourra toujours déterminer des valeurs entières de v, telles que les valeurs correspondantes de z données par les équations

$$z = \sqrt{(\mu v \mp \alpha)},$$

seront entières et rationnelles.

Or, pour que cette équation admette des solutions, il faut que μ, ou l'un de ses multiples $g\mu$, puisse se mettre sous les deux formes $q^2 + \alpha p^2$ et $q^2 - \alpha p^2$.

Cas particuliers.

Théorème a. *Tout nombre premier μ de la forme $4m+1$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous les deux formes q^2+p^2 et q^2-p^2.*

Théorème b. *Tout nombre premier μ de la forme $8m+1$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous les deux formes q^2+2p^2 et q^2-2p^2.*

Théorème c. *Tout nombre premier μ de la forme $12m+1$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous les deux formes q^2+3p^2 et q^2-3p^2.*

Théorème d. *Tout nombre premier μ de l'une des formes $20m+1$ et $20m+9$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous les deux formes q^2+5p^2 et q^2-5p^2.*

Théorème e. *Tout nombre premier μ de l'une des formes $28m+1$, $28m+9$ et $28m+25$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous les deux formes q^2+7p^2 et q^2-7p^2.*

Et ainsi de suite.

§. 4.

Théorème II. *Tout nombre premier μ de la forme $4\alpha m+R$* (α étant également un nombre premier) *ne peut, ainsi qu'aucun de ses multiples, être mis sous aucune des deux formes $q^2+\alpha p^2$ et $q^2-\alpha p^2$, si R est de la forme $4n+1$ et de plus racine impaire du nombre premier α.*

En effet, si R est racine impaire du nombre premier α, et de plus un nombre de la forme $4n+1$, le nombre μ sera lui-même de la forme $4p+1$, et par suite les deux nombres $+\alpha$ et $-\alpha$ qui sont racines complémentaires, seront tous deux des racines impaires de μ. Il résulte de là que l'on ne pourra pas déterminer des valeurs entières de v telles que les valeurs de z données par les expressions

$$z = \sqrt{(\mu v \pm \alpha)},$$

soient entières et rationnelles.

Or, comme il serait possible de satisfaire à l'égalité précédente si un multiple de μ pouvait prendre l'une ou l'autre des deux formes $q^2 \pm \alpha p^2$, on en peut conclure le théorème énoncé.

Cas particuliers.

Théorème a. ***Tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $8m+5$, ***ne peut, ainsi que ses multiples, être mis sous aucune des deux formes*** q^2+2p^2 ***et*** q^2-2p^2.

Théorème b. ***Tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $12m+5$, ***ne peut, ainsi que ses multiples, être mis sous aucune des deux formes*** q^2+3p^2 ***et*** q^2-3p^2.

Théorème c. ***Tout nombre premier*** μ ***de l'une des formes*** $20m+13$ $20m+17$, ***ne peut, ainsi que ses multiples, être mis sous aucune des deux formes*** q^2+5p^2 ***et*** q^2-5p^2.

Théorème d. ***Tout nombre premier*** μ ***de l'une des formes*** $28m+5$, $28m+17$ ***et*** $28m+13$, ***ne peut, ainsi que ses multiples, être mis sous aucune des deux formes*** q^2+7q^2 ***et*** q^2-7p^2.

Et ainsi de suite.

Des procédés analogues à ceux que nous venons d'employer pour la démonstration de ces théorèmes (I. et II.), nous conduiront aux propositions suivantes:

§. 5.

Théorème III. ***Tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $4\alpha m+R$ (α étant également un nombre premier), ***peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme*** $q^2+\alpha p^2$, ***tandis que ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme*** $q^2-\alpha p^2$, ***si le nombre*** R ***est de la forme*** $4n+3$ ***et de plus racine impaire du nombre premier*** α ***qui lui-même est de la forme*** $4n+1$.

Cas particuliers.

Théorème a. ***Tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $8m+3$, ***peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme*** q^2+2p^2; ***tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples ne peut prendre la forme*** q^2-2p^2.

Théorème b. ***Tout nombre premier*** μ ***de l'une des formes*** $20m+3$ et $20m+7$, ***peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme*** q^2+5p^2; ***tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter celle de*** q^2-5p^2.

Et ainsi de suite.

§. 6.

Théorème IV. *Tout nombre premier μ de la forme $4\alpha m+R$* (α étant également un nombre premier), *peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme $q^2-\alpha p^2$, tandis que ce nombre premier, ni aucun de ces multiples, ne peut affecter la forme $q^2+\alpha p^2$, si le nombre R est de la forme $4n+3$ et de plus racine impaire du nombre premier α, qui lui-même est de la forme $4n+3$.*

Théorème a. *Tout nombre premier μ de la forme $4m+3$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme q^2-p^2, tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme q^2+p^2.*

Théorème b. *Tout nombre premier μ de la forme $8m+7$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme q^2-2p^2, tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme q^2+2p^2.*

Théorème c. *Tout nombre premier μ de la forme $12m+11$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme q^2-3p^2, tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme q^2+3p^2.*

Théorème d. *Tout nombre premier μ de l'une des formes $28m+3$, $28m+19$, $28m+27$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme q^2-7p^2, tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples, ne peut être mis sous la forme q^2+7p^2.*

Et ainsi de suite.

§. 7.

Théorème. V. *Tout nombre premier μ de la forme $4\alpha m+R$* (α étant également un nombre premier), *peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme $q^2+\alpha p^2$; tandis que ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme $q^2-\alpha p^2$, si le nombre R est de la forme $4n+3$ et de plus racine paire du nombre premier α qui lui-même est de la forme $4n+3$.*

Théorème a. *Tout nombre premier μ de la forme $12m+7$, peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme q^2+3p^2; tandis que ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme q^2-3p^2.*

Théorème b. *Tout nombre premier* μ, *de l'une des formes* $28m+11$, $28m+15$, $28m+23$, *peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme* q^2+7p^2; *tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme* q^2-7p^2.

Et ainsi de suite.

§. 8.

Théorème VI. *Tout nombre premier* μ *de la forme* $4\alpha m+R$ (α étant également un nombre premier), *peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme* $q^2-\alpha p^2$; *tandis que ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter la forme* $q^2+\alpha p^2$, *si le nombre* R *est de la forme* $4n+3$ *et de plus racine paire du nombre premier* α, *qui lui-même est de la forme* $4n+1$.

Théorème a. *Tout nombre premier* μ *de l'une des formes* $20m+11$, $20m+19$, *peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme* q^2-5p^2; *tandis que ce nombre, ni aucun de ses multiples, ne peut être mis sous celle de* q^2+5p^2.

Et ainsi de suite.

§. 9.

Théorème VII. *Tout nombre premier* μ, *qui est tel qu'en y ajoutant un carré* u^2, *le résultat est divisible par* 4, *peut, lui-même, ou l'un de ses multiples, être mis sous la forme* q^2-kp^2; *tandis que ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne peut être mis sous celle de* q^2+kp^2; *le nombre* k *désignant un diviseur impair quelconque de* $\mu+u^2$.

Si de plus μ *est de la forme* $8m+3$, *ce nombre premier, ou l'un de ces multiples, pourra encore être mis sous la forme* q^2+2kp^2, *sans pouvoir affecter celle de* q^2-2kp^2.

Si μ *est de la forme* $8m+7$, *ce nombre premier, ou l'un de ses multiples, pourra également être mis sous la forme* q^2-2kp^2, *sans pouvoir affecter celle de* q^2+2kp^2.

Pour reconnaître l'exactitude de ce théorème, nous ferons d'abord remarquer que, pour qu'un nombre premier μ soit divisible par 4, lorsqu'on y ajoute un carré u^2, il faut que ce nombre soit de la forme $4n+3$. Il résulte de cette observation que deux racines complémentaires de μ sont nécessairement l'une paire, l'autre impaire, et par conséquent si μ, ou l'un de ses multiples, peut être mis sous la forme q^2-kp^2, ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne peut affecter celle de q^2+kp^2.

Cela posé, si l'on suppose le facteur impair k égal au produit de plusieurs facteurs premiers égaux ou inégaux $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, nous pourrons conclure du théorème (XI) que nous avons donné (Voyez ce journal Tome XLV page 313) que l'on pourra toujours satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{(\mu v + \alpha)}, \\ z' &= \sqrt{(\mu v' + \beta)}, \\ z'' &= \sqrt{(\mu v'' + \gamma)}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et par suite à l'équation

$$Z = \sqrt{(\mu V + K)}:$$

équation qui établit (§§. 1 et 2) que μ, ou l'un de ses multiples, peut être mis sous la forme $q^2 - kp^2$.

Remarquons en outre que si μ est de la forme $8m+3$, l'équation:

$$z''' = \sqrt{(\mu v''' - 2)}$$

pourra être satisfaite, tandis qu'au contraire l'équation

$$z''' = \sqrt{(\mu v''' + 2)}$$

n'aura aucune solution. Ce qui permet d'établir que le nombre premier $\mu = 8m+3$, ou l'un de ses multiples, peut être mis sous la forme $q^2 + 2kp^2$, et par suite ne peut pas affecter la forme $q^2 - 2kp^2$.

Si μ est de la forme $8m+7$, c'est l'équation

$$z''' = \sqrt{(\mu v''' + 2)}$$

à laquelle on peut satisfaire, tandis que l'équation

$$z''' = \sqrt{(\mu v''' - 2)}$$

ne peut admettre aucune solution. Ce qui permet d'établir que le nombre premier $\mu = 8m+7$, ou l'un de ses multiples, peut être mis sous la forme $q^2 - 2kp^2$, et par suite ne peut pas affecter la forme $q^2 + 2kp^2$.

§. 10.

Théorème VIII. *Tout nombre premier μ, qui est tel qu'en en retranchant un carre u^2, le résultat est divisible par 4, peut lui même ou l'un de ses multiples, être mis sous l'une et l'autre des deux formes $q^2 - kp^2$ et $q^2 + kp^2$; le nombre k représentant un diviseur impair de $\mu - u^2$.*

Si de plus μ est de la forme $8m+1$, ce nombre premier, ou l'un de ses multiples, pourra encore être mis sous les deux formes $q^2 - 2kp^2$ et $q^2 + 2kp^2$.

Si μ est de la forme $8m+5$, ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne pourra être mis sous les formes q^2-2kp^2 et q^2+2kp^2.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème précédent; le même mode de recherches donne également les deux théorèmes suivants:

§. 11.

Théorème IX. Si le nombre premier μ de la forme $4n+1$, est tel qu'en en retranchant un carré quelconque u^2, le résultat obtenu ne puisse en aucun cas être divisible par $4k$ (k étant un nombre impair quelconque): ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne peut être mis sous les formes q^2-kp^2 et q^2+kp^2.

Si de plus μ est de la forme $8m+1$, ce nombre premier, ni aucun de ses multiples, ne pourra être mis sous aucune des deux formes q^2-2kp^2 et q^2+2kp^2.

Si μ est de la forme $8m+5$, ce nombre premier, ou l'un de ses multiples, pourra être mis sous les deux formes q^2-2kp^2 et q^2+2kp^2.

§. 12.

Théorème X. Si le nombre premier μ de la forme $4n+3$ est tel qu'en y ajoutant un carré quelconque u^2, le résultat obtenu ne puisse en aucun cas être divisible par $4k$ (k étant un nombre impair quelconque): ce nombre premier, ou l'un de ses multiples, pourra être mis sous l'une ou l'autre des deux formes q^2-kp^2 et q^2+kp^2: sous la première q^2-kp^2, si la congruence

$$K^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu}$$

est satisfaite, et sous la seconde q^2+kp^2, si cette congruence ne l'est pas.

Si de plus μ est de la forme $8m+3$, ce nombre premier, ou l'un de ses multiples, pourra affecter l'une des deux formes $q^2\pm 2kp^2$, s'il peut être mis sous l'une des formes $q^2\mp kp^2$.

Si μ est de la forme $8m+7$, ce nombre premier, ou l'un de ses multiples, pourra affecter l'une des deux formes $q^2\pm 2kp^2$ s'il peut être mis sous l'une des formes $q^2\pm kp^2$.

§. 13.

Enfin, il est facile de reconnaître que les différents théorèmes compris dans cette note, peuvent être compris sous un seul énoncé de la manière suivante:

Théorème général. 1°. ***Tout nombre premier*** μ, ***ou l'un de ses multiples,*** $g\mu$ ($g < 2\sqrt{\frac{1}{3}k}$ si k est positif, ou $g < 1-k$ si k est négatif), ***peut être mis sous la forme***

$$q^2 + kp^2,$$

si le nombre k ***satisfait à la congruence***

$$k^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu}.$$

2°. ***Tout nombre premier*** μ, ***ni aucun de ses multiples, ne peut être mis sous la forme***

$$q^2 + kp^2,$$

si le nombre k ***satisfait à la congruence***

$$k^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv +1 \pmod{\mu}.$$

Genève 26 Janvier 1854.

12.

Mémoire sur la détermination des racines primitives des nombres premiers.

(Par Mr. *Oltramare*, prof. de math. supér. à l'académie des sciences de Genève.)

Nous nous proposons dans ce mémoire de réunir plusieurs propositions à l'aide desquelles on puisse déterminer une racine primitive d'un nombre premier; car on sait que la connaissance d'une racine primitive conduit aisément à la détermination de toutes les autres racines de ce nombre premier.

Bien que l'ensemble des théorèmes que nous allons établir, ne puisse généralement donner une racine primitive de tout nombre premier proposé, cependant il en est peu dont la forme ne permette pas d'arriver à la détermination de l'une de ses racines primitives, et nous nous sommes assurés que, sur les nombres premiers plus petits que 3400, les racines primitives de 30 seulement ne pouvaient être trouvées.

§. 1.

Théorème I. *Si un nombre premier μ, qu'on peut toujours supposer de la forme $2^s \alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots \varepsilon^q + 1$ (α, β, γ, $\ldots$ ε étant également des nombres premiers différents entr'eux et plus grands que 2) est tel, qu'en désignant par r_t une racine de ce nombre de l'ordre t: la congruence*

$$(1.) \qquad (r_t)^{\alpha(\mu-1)\left\{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots+\frac{1}{\varepsilon}\right\}} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est point satisfaite.

En posant:

$$R_k \equiv \cos\frac{2k\omega}{\alpha} + \sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1} \pmod{\mu}$$

(k étant un nombre entier compris entre 0 et α): *la valeur de l'expression*

$$(2.) \qquad x \equiv (r_t)^{\alpha} \sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k} \pmod{\mu}$$

sera une racine du nombre premier μ d'un ordre marqué par le plus grand commun diviseur entre t et 2^s.

Pour reconnaître l'exactitude de ce théorème, nous remarquerons d'abord que la valeur

$$x \equiv (r_t)^{\alpha} \sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k} \pmod{\mu}$$

ne peut satisfaire à aucune des congruences qui donnent des racines du nombre premier μ d'un ordre dont l'indice est un multiple de α; par la raison que l'expression

$$\sqrt[\alpha]{x} \equiv r_t \sqrt[\alpha^{m}]{R_k} \pmod{\mu}$$

est une quantité irrationnelle pour tout nombre premier μ qui n'est pas de la forme $\alpha^{m-1}h+1$.

En second lieu, si nous supposons qu'on ait formé les congruences qui donnent les racines du nombre premier μ des ordres non multiples de α, et qu'on y ait substitué pour x la valeur $(r_t)^{\alpha} \sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k}$, en admettant que cette valeur puisse satisfaire à l'une d'elles, on arrivera nécessairement au résultat suivant:

$$(A.) \qquad (r_t)^{2^{s'}\alpha^{m-1}\beta^{n'}\gamma^{p'}\ldots\varepsilon^{q'}} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu};$$

relation dans laquelle

s' sera plus petit ou tout au plus égal à s,
n' sera plus petit ou tout au plus égal à n,
. . . . . .
q' sera plus petit ou tout au plus égal à q.

Mais cette dernière congruence sera cependant telle que l'on ne saurait avoir simultanément:

$$n' = n, \quad p' = p, \quad \ldots\ldots\ldots \quad q' = q,$$

si l'on admet de laisser de côté les congruences

$$(B.) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} X_{(2^s)} & = \dfrac{x^{\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots\varepsilon^q}-1}{X} \equiv 0 \\ X_{(2^{s-1})} & = \dfrac{x^{2\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots\varepsilon^q}-1}{X'} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ X_{(2)} & = \dfrac{x^{2^{s-1}\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots\varepsilon^q}-1}{X^{(s-1)}} \equiv 0 \\ X_{(1)} & = \dfrac{x^{2^{s-1}\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots\varepsilon^q}+1}{X^{(s)}} \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{\mu}$$

qui déterminent les racines du nombre premier μ des ordres 2^s, 2^{s-1}, ... 2 et primitives.

Il résulte de là que si aucune des congruences

$$(C.)\quad \begin{cases} (r_t)^{\alpha(\mu-1)\frac{1}{\beta}} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}, \\ (r_t)^{\alpha(\mu-1)\frac{1}{\gamma}} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (r_t)^{\alpha(\mu-1)\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}, \end{cases}$$

n'est satisfaite, il faudra en conclure, à fortiori, que la congruence (*A.*) ne peut être satisfaite, et par conséquent que l'expression

$$x \equiv (r_t)^{\alpha} \sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k} \pmod{\mu}$$

est nécessairement une racine d'un ordre marqué par l'une des congruences (*B.*).

Si l'on remarque que l'ensemble des congruences (*C.*) peut être mis sous la forme de la relation unique

$$(r_t)^{\alpha(\mu-1)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots+\frac{1}{\varepsilon}\right)} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

on en conclura que, si cette dernière congruence n'est pas satisfaite, l'expression $(r_t)^{\alpha} \sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k}$ est une racine du nombre premier μ de l'un des ordres 2^s, 2^{s-1}, ... 2, ou primitive.

En mettant cette expression dans les congruences (*B.*) on obtient:

$$\begin{aligned} (r_t)^{\alpha^{m+1}\beta^n\gamma^p\cdots\varepsilon^q} - 1 &\equiv 0 \pmod{\mu}, \\ (r_t)^{2\alpha^{m+1}\beta^n\gamma^p\cdots\varepsilon^q} - 1 &\equiv 0 \pmod{\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\

2°. Si r_t est une racine de μ d'un ordre seulement une fois divisible par 2, c'est l'avant-dernière de ces congruences qui est satisfaite, et par suite l'expression $(r_t)^{\alpha}\sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k}$ est une racine seconde de μ.

3°. Si r_t est une racine de μ d'un ordre doublement pair, l'expression $(r_t)^{\alpha}\sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k}$ est une racine de l'ordre 2^2.

4°. Si etc.

En d'autres termes, l'expression $(r_t)^{\alpha}\sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k} \pmod{\mu}$ est une racine d'un ordre marqué par le plus grand commun diviseur entre t et 2^s.

On peut substituer à la congruence (1.) une congruence beaucoup plus simple, en remarquant:

1°. Que par le théorème de ***Fermat*** on a:

$$(r_t)^{\mu-1} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

2°. Que les valeurs de r_t qui satisfont à la congruence (1.) et à celle-ci, doivent également satisfaire à la congruence

$$(r_t)^{D} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu};$$

D représentant le plus grand commun diviseur entre $\alpha(\mu-1)\left\{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots+\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ et $\mu-1$ qui a pour valeur:

$$D = 2^s \alpha^m \beta^{n-1} \gamma^{p-1} \ldots \varepsilon^{q-1}.$$

On pourra donc au lieu de la congruence (1.) employer la suivante:

$$(3.) \qquad (r_t)^{2^s \alpha^m \beta^{n-1} \gamma^{p-1} \ldots \varepsilon^{q-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

§. 2.

Les valeurs de

$$R_k \equiv \cos\frac{2k\omega}{\alpha} + \sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1} \pmod{\mu}$$

considérées dans le paragraphe précédent, n'étant autre chose que les racines de la congruence

$$x^{\alpha} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

différentes de l'unité, il est évident que si l'on désigne par g un nombre tel que la congruence

$$g^{\frac{\mu-1}{\alpha}} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

ne soit point satisfaite, en posant

$$x \equiv R_k \equiv g^{\frac{\mu-1}{\alpha}} \pmod{\mu},$$

on aura une racine de la congruence proposée, différente de l'unité. Cette valeur de R_k, mise dans la congruence (2.) du parag. précédent, nous permet d'établir la proposition suivante:

Théorème II. *Si un nombre premier μ qu'on peut supposer de la forme $2^s\alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots\varepsilon^q+1$, est tel que:*

1°. *En désignant par r_t une racine impaire de μ, la congruence*

$$(r_t)^{2^s\alpha^m\beta^{n-1}\gamma^{p-1}\ldots\varepsilon^{q-1}}-1\equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est point satisfaite,

2°. *En designant par g un nombre tel que la congruence*

$$g^{\frac{\mu-1}{\alpha}}-1\equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est point satisfaite, la valeur de l'expression

$$x\equiv (r_t)^{\alpha}g^{\frac{\mu-1}{\alpha^m}} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive du nombre premier μ.

Si l'on suppose $\mu=2\alpha\beta+1$, α et β étant différents de 3, μ sera de la forme $6n-1$, et -3 sera une racine impaire de μ. On aura donc, en faisant $g=-3$, la proposition suivante:

Théorème a. *Si μ est un nombre premier de la forme $2\alpha\beta+1$ (α et β étant différents de 3):*

1°. *La valeur de l'expression*

$$-3^{\alpha}2^{2\beta} \pmod{\mu}$$

sera racine primitive de μ, si aucune des deux congruences

$$3^{2\alpha}-1\equiv 0 \pmod{\mu} \text{ et}$$
$$2^{2\beta}-1\equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est satisfaite.

2°. *La valeur de l'expression*

$$-3^{\beta}2^{2\alpha} \pmod{\mu}$$

sera racine primitive de μ, si aucune des deux congruences

$$3^{2\beta}-1\equiv 0 \pmod{\mu} \text{ et}$$
$$2^{2\alpha}-1\equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est satisfaite.

On peut déduire comme cas particuliers:

Théorème a'. ***Si μ est un nombre premier de la forme $2.11.\beta+1$*** (β étant différent de 3), ***la valeur de l'expression***

$$-3^{11}.2^{2\beta} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si la congruence

$$2^{2\beta}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Théorème a''. ***Si μ est un nombre premier de la forme $2.11.\beta+1$*** (β étant différent de 3 et 31), ***la valeur de l'expression***

$$-3^{\beta}.2^{22} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si la congruence

$$3^{2\beta}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Théorème b'. ***Si μ est un nombre premier de la forme $2.13.\beta+1$*** (β étant différent de 3), ***la valeur de l'expression***

$$-3^{13}.2^{2\beta} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si la congruence

$$2^{2\beta}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Théorème b''. ***Si μ est un nombre premier de la forme $2.13\beta+1$*** (β étant différent de 3), ***la valeur de l'expression***

$$-3^{\beta}.2^{26} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si la congruence

$$3^{2\beta}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

§. 3.

Si, dans le théorème (II.), on admet qu'il puisse exister une valeur de g égale à r_t, on obtient le théorème suivant:

Théorème III. ***Si r_t est une racine impaire du nombre premier μ de la forme $2^s\alpha^m\beta^n\gamma^p \ldots \varepsilon^q+1$, telle que les congruences***

$$(r_t)^{\frac{\mu-1}{a}}-1 \equiv 0 \pmod{\mu} \text{ et}$$

$$(r_t)^{2^s\alpha^m\beta^{n-1}\gamma^{p-1}\ldots\varepsilon^{q-1}}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

ne soient point satisfaites; cette valeur de r_t sera une racine primitive de μ.

En remarquant que, si

$$x \equiv (r_t)^{\alpha+\frac{\mu-1}{\alpha^m}} \pmod{\mu}$$

est une racine primitive de μ, r_t doit également être une racine primitive de ce même nombre premier. On en peut déduire de ce théorème comme cas particulier:

Théorème a. ***Le nombre*** -3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** $\mu = 2^s\alpha\beta+1$ (α et β étant différents de 3), ***si aucune des congruences***

$$3^{2^s\alpha}-1 \equiv 0 \pmod{\mu} \text{ et}$$
$$3^{2^s\beta}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est satisfaite.

§. 4.

Supposant le nombre premier μ de la forme $2^s\alpha^m+1$, il n'existera aucune racine du nombre premier μ d'un ordre non multiple de α, autre que les racines des ordres 2^s, 2^{s-1}, ... 2 et primitives, et l'on pourra substituer au théorème (I.) le suivant:

Théorème IV. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2^s\alpha^m+1$ (α étant également un nombre premier), ***en désignant par*** r_t ***une racine de ce nombre de l'ordre*** t, ***et en posant:***

$$R_k \equiv \cos\frac{2k\omega}{\alpha}+\sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1} \pmod{\mu},$$

la valeur de l'expression

$$(r_t)^{\alpha}\sqrt[\alpha^{m-1}]{R_k} \pmod{\mu}$$

sera une racine du nombre premier μ ***d'un ordre marqué par le plus grand commun diviseur entre*** t ***et*** 2^s.

En combinant ce théorème avec le théorème (III.) du parag. précédent, on obtient:

Théorème V. ***Si*** r_t ***est une racine impaire du nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^s\alpha^m+1$, ***telle que la congruence***

$$(r_t)^{\frac{\mu-1}{\alpha}}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite, cette valeur de r_t ***sera une racine primitive du nombre premier*** μ.

§. 5.

Les valeurs de R_k, ou les racines de la congruence

$$x^\alpha - 1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

différentes de l'unité, peuvent être trouvées pour certaines valeurs de α par des formules faciles à calculer.

1°. Soit $\alpha = 3$, on a:

$$R_k \equiv -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \pmod{\mu}.$$

Pour déterminer la valeur de l'expression $\sqrt{-3} \pmod{\mu}$ qui, par la forme du nombre premier μ, est rationnelle, il suffit de mettre le nombre premier μ sous la forme $q^2 + 3p^2$ et de poser

$$\sqrt{-3} \equiv qy_1 - 3px_1 \pmod{\mu},$$

x_1 et y_1 étant une solution particulière de l'équation indéterminée

$$qx + py = 1.$$

2°. Soit $\alpha = 5$, on trouve:

$$R_k \equiv -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})} \pmod{\mu}.$$

Pour déterminer la valeur de l'expression $\sqrt{5} \pmod{\mu}$ qui, par la forme du nombre premier μ, est rationnelle, il suffit de mettre le nombre premier μ sous la forme $q^2 - 5p^2$ et de poser

$$\sqrt{5} \equiv qy_1 + 5px_1 \pmod{\mu},$$

x_1 et y_1 étant une solution particulière de l'équation indéterminée

$$qx + py = 1.$$

On aura ainsi:

$$R_k \equiv \tfrac{1}{4}\{qy_1 + 5px_1 - 1 + \sqrt{(-10 - 2(qy_1 + 5px_1))}\} \pmod{\mu}.$$

La valeur du radical

$$\sqrt{(-10 - 2(qy_1 + 5px_1))} \equiv \sqrt{K} \pmod{\mu}$$

s'obtiendra de même en posant

$$\mu = q'^2 - kp'^2,$$

et en posant:

$$\sqrt{(-10 - 2(qy_1 + 5px_1))} \equiv \sqrt{K} \equiv q'y'_1 + kp'x'_1 \pmod{\mu},$$

y'_1 et x'_1 étant une solution particulière de l'équation indéterminée

$$q'x' + p'y' = 1.$$

3°. Soit $\alpha = 7$ on obtient:

$$R_k \equiv \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sqrt{(z^2-4)} \pmod{\mu},$$

z étant donné par la relation

$$z \equiv \tfrac{1}{3}(v-1) \pmod{\mu},$$

v désignant une racine de la congruence du troisième degré

$$v^3 - 21v - 7 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

§. 6.

Théorème VI. ***Le nombre 3 est racine primitive de tout nombre premier μ de la forme 2^m+1.***

Remarquons d'abord que le nombre 2^m+1 ne peut être un nombre premier qu'autant que m est un nombre pair; car en supposant $m = 2k+1$, on a l'expression $2^{2k+1}+1$, qui est divisible par 3. Si donc on pose $\mu = 2^{2k}+1$, il est facile de voir que μ est également de la forme $12h+5$.

Or, comme le nombre 3 est racine impaire de tout nombre premier μ de la forme $12h+5$; que d'ailleurs toute racine impaire de μ est par la forme même de ce nombre une racine primitive: 3 est racine primitive de μ.

§. 7.

Théorème VII. ***Le nombre 2 est racine primitive de tout nombre premier μ de la forme $2\alpha+1$*** (α étant également un nombre premier de la forme $4n+1$).

L'expression $-\frac{1}{2} \pmod{\mu}$, ***ou le nombre α, est racine primitive de tout nombre premier μ de la forme $2\alpha+1$*** (α étant également un nombre premier de la forme $4n+3$).

En effet, tout nombre premier μ de la forme $2\alpha+1$ ne peut avoir que des racines dont l'ordre est marqué par les nombres 1, 2, α et 2α; mais 1 est la seule racine de l'ordre 2α, et $\mu-1$ la seule racine de l'ordre α; donc tous les nombres compris entre 1 et $\mu-1$ sont, ou des racines du second ordre, ou des racines primitives. Il en résulte que toute racine impaire, comprise entre ces nombres, est une racine primitive.

Si α est de la forme $4n+1$, μ sera de la forme $8h+3$. Mais comme 2 est racine impaire de tout nombre premier de cette dernière forme, 2 sera racine primitive de μ.

Si α est de la forme $4n+3$, μ sera de la forme $8h+7$; mais comme 2 est racine paire de tout nombre premier de cette forme, 2 sera une racine

seconde de μ; on aura donc:

$$2^{\frac{1}{2}(\mu-1)}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Cette congruence, combinée avec la congruence identique

$$2\alpha+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

donne

$$\alpha^{\frac{1}{2}(\mu-1)}+1 \equiv 0, \quad (-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}(\mu-1)}+1 \equiv 0 \pmod{\mu};$$

α, ou $-\frac{1}{2} \pmod{\mu}$, étant racine impaire de μ, sera une racine primitive.

§. 8.

Théorème VIII. ***Le nombre 2 est racine primitive de tout nombre premier μ de la forme $2^2\alpha+1$*** (α étant également un nombre premier quelconque).

Par la forme du nombre premier $\mu = 2^2\alpha+1$, on a les congruences

$$(1.) \quad X_{(\alpha)} = x^2+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$$(2.) \quad X_{(1)} = \frac{x^{2\alpha}+1}{x^2+1} \equiv 0 \pmod{\mu}:$$

la première pour déterminer les racines du nombre premier μ de l'ordre α, la seconde pour déterminer les racines primitives.

Cela posé, si nous remarquons que le nombre 2 est une racine impaire de μ, et que ce nombre ne satisfait pas à la congruence (1.), comme le nombre premier μ n'a pas d'autres racines impaires que des racines de l'ordre α et des racines primitives, il faudra admettre que 2 est une racine primitive de μ.

Le nombre α ne pouvant avoir que les deux formes $4n+1$ et $4n+3$, il en résulte que μ est nécessairement de la forme $8h+5$, et par suite le nombre 2 est racine impaire de μ.

Faisant $x = 2$ dans la congruence (1.), on obtient:

$$5 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

qui ne peut être satisfaite que par $\mu = 5$; et comme dans ce cas encore le nombre 2 est racine primitive de μ, on en conclura le théorème que nous venons d'énoncer.

§. 9.

Théorème IX. ***Si μ est un nombre premier de la forme $2^m.3+1$, il pourra également être mis sous la forme q^2+3p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx+py = 1,$$

la valeur de l'expression:

$$5^3(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(qy_1-3px_1)) \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ.

Remarquons d'abord que le nombre 5 est une racine impaire du nombre premier $\mu = 2^m.3+1$; car, tout nombre premier de cette forme est nécessairement aussi de la forme $10h \pm 3$. Faisons observer en outre que l'expression

$$5^3(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu}$$

est une racine primitive de μ.

En effet, cette expression est racine impaire de μ; car substituée dans la congruence

$$x^{\frac{1}{3}(\mu-1)}+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

elle donne

$$5^{\frac{1}{3}(\mu-1)}+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

et comme 5 est racine impaire de μ, cette dernière congruence est satisfaite.

En second lieu, en remarquant que les racines impaires de μ ne peuvent être (par la forme même de ce nombre premier), que des racines du troisième ordre, ou des racines primitives, et que l'expression

$$5^3(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu}$$

ne peut représenter une racine du troisième ordre, parceque la quantité

$$\sqrt[3]{(5^3(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}))} = 5\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})}$$

est irrationnelle pour tout nombre premier μ qui n'est pas de la forme 3^2h+1, il faut en conclure que

$$(1.) \quad 5^3(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu}$$

est une racine primitive de μ.

Or $\sqrt{-3}$, par la forme du nombre premier μ, est une quantité rationnelle dont la valeur est qy_1-3px, p et q étant deux nombres satisfaisant à l'égalité $\mu = q^2+3p^2$, et x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée du premier degré

$$qx+py = 1,$$

en mettant cette valeur de $\sqrt{-3}$ dans l'expression (1.), on obtient la valeur

$$5^3(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(qy_1-3px_1)) \pmod{\mu}$$

comme racine primitive du nombre premier μ.

§. 10.

Théorème X. *Si le nombre premier* μ *de la forme* $2^m\alpha+1$ (m étant >1 et α un nombre premier) *est tel, que la congruence*

$$(1.)\quad 3^{2^{m-1}}+1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est point satisfaite: le nombre 3 *sera racine primitive de ce nombre premier.*

Par la forme du nombre premier μ, on a les congruences:

$$(a.)\quad x^{2^{m-1}}+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$$(b.)\quad \frac{x^{2^{m-1}\alpha}+1}{x^{2^{m-1}}+1} \equiv 0 \pmod{\mu},$$

la première pour déterminer les racines de l'ordre α, la seconde pour déterminer les racines primitives de μ.

Cela posé, si nous remarquons que 3 est racine impaire de μ et que ce nombre ne satisfait pas à la congruence ($a.$); et comme le nombre premier μ n'a pas d'autres racines impaires que des racines de l'ordre α et des racines primitives, il faudra admettre que 3 est racine primitive de μ.

Remarquons d'abord que si m est un nombre ***impair***, α doit être de la forme $3t+2$, et que si m est un nombre ***pair***, il doit être de la forme $3t+1$.

Soient, en effet, $m=2p+1$ et $\alpha=3t+1$, la valeur de μ pourra s'écrire:

$$\mu = 3.2^{2p+1}t+2^{2p+1}+1 = 3H;$$

ce qui est impossible, puisque μ est, par hypothèse, un nombre premier.

Soient, en second lieu, $m=2p$ et $\alpha=3t+2$, la valeur de μ pourra s'écrire:

$$\mu = 3.2^{2p}t+2^{2p+1}+1 = 3G,$$

ce qui est inadmissible.

Le nombre 3 est racine impaire de tout nombre premier μ de la forme $12h+5$. Si donc nous posons

$$2^m\alpha+1 = 12h+5,$$

et si, quelle que soit la valeur du nombre premier α, on reconnait que l'on peut satisfaire à cette égalité, le nombre 3 sera racine impaire de μ.

Considérons deux cas: selon que m est ***pair***, ou ***impair***. Soit m ***pair***, α est de la forme $3t+1$, et l'égalité précédente devient:

$$h = 2^{m-2}t+\frac{2^{m-2}-1}{3},$$

qui sera satisfaite, si m est égal ou plus grand que 2; car alors $\frac{2^{m-2}-1}{3}$ est un nombre entier si m est pair. Soit m ***impair,*** α est de la forme $3t+2$ et l'égalité précédente devient:

$$h = 2^{m-2}.t + \frac{2^{m-1}-1}{3}:$$

égalité qui est satisfaite si m est un nombre impair plus grand que 2.

Faisons maintenant dans la congruence (*a.*) $x = 3$, nous aurons:

$$3^{2^{m-1}} + 1 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Il résulte de là que si cette dernière congruence n'est point satisfaite, le nombre 3 est racine primitive de μ.

Théorème a. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^2\alpha+1$ (α étant un nombre premier plus grand que 3).

Théorème b. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^3\alpha+1$ (α étant un nombre premier plus grand que 5).

Théorème c. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^4\alpha+1$ (α étant un nombre premier quelconque).

Théorème d. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^5\alpha+1$ (α étant un nombre premier plus grand que 3).

Théorème e. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^6\alpha+1$ (α étant un nombre premier > 3).

Théorème f. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^7\alpha+1$ (α étant un nombre premier).

Théorème g. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^8\alpha+1$ (α étant un nombre premier).

Théorème h. ***Le nombre*** 3 ***est racine primitive de tout nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^9\alpha+1$ (α étant un nombre premier).

Etc. etc.

Il suffit pour démontrer ces divers propositions de s'assurer que la congruence (1.) n'est point satisfaite.

§. 11.

Théorème XI. ***Si le nombre r est une racine impaire d'un nombre premier*** μ ***de la forme*** $2^2\alpha^2+1$, ***tel que la congruence***

$$r^{2\alpha}+1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est point satisfaite: cette valeur r, supposée différente de $\pm 2\alpha$, *sera une racine primitive de* μ.

En effet, le nombre premier μ n'admettant comme racines impaires que des racines des ordres α^2, α, et primitives, si l'on remarque que la racine impaire r ne satisfait à aucune des congruences

$$(1.) \quad X_{(\alpha^2)} = x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$$(2.) \quad X_{(\alpha)} = \frac{x^{2\alpha}+1}{x^2+1} \equiv 0 \pmod{\mu},$$

on en conclura que r est racine primitive de μ.

Or, la première de ces congruences donne

$$x \equiv \pm 2\alpha \pmod{\mu},$$

par consequent la valeur r, différente de $\pm 2\alpha$, ne peut y satisfaire. De plus, en supposant $x = r$ dans la congruence (2.), on a:

$$r^{2\alpha} + 1 \equiv 0 \pmod{\mu}:$$

congruence qui, par hypothèse, n'est point satisfaite.

Quelle que soit la valeur du nombre premier α, il est aisé de voir que le nombre premier μ est de la forme $8h-3$; donc 2 est racine impaire de μ, et l'on peut dire:

Théorème a. Le nombre 2 *est racine primitive de tout nombre premier* μ *de la forme* $2^2\alpha^2+1$ (α étant également un nombre premier), *si la congruence*

$$2^{2\alpha} + 1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Si α est différent de 3, μ est de la forme $12h+5$; par suite le nombre 3 est racine impaire de μ, et on peut dire:

Théorème b. Le nombre 3 *est racine primitive de tout nombre premier* μ *de la forme* $2^2\alpha^2+1$ (α étant un nombre premier >3), *si la congruence*

$$3^{2\alpha} + 1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Si α est différent de 5, μ est de la forme $10h-3$, et par suite 5 est une racine impaire de μ, et l'on peut dire:

Théorème c. Le nombre 5 *est racine primitive de tout nombre premier* μ *de la forme* $2^2\alpha^2+1$ (α étant un nombre premier différent de 5),

si la congruence

$$5^{2\alpha}+1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

§. 12.

Théorème XII. *Si μ est un nombre premier de la forme $2\alpha^m\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$, tel que la congruence*

$$2^{2\alpha^m}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est point satisfaite. En posant

$$R_k \equiv \cos\frac{2k\omega}{\alpha}+\sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1} \pmod{\mu}:$$

1°. *la valeur de l'expression*

$$\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si ce nombre premier est de la forme $8h\pm3$;

2°. *la valeur de l'expression*

$$\frac{-1}{\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)}} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si ce nombre premier est de la forme $8h\pm1$.

Nous savons par le Théorème (I.) que:

1°. si 2 est racine ***impaire*** de μ, l'expression $\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$ est une racine primitive de ce même nombre premier;

2°. si 2 est racine ***paire*** de μ, l'expression $\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$ est une racine seconde de ce même nombre premier.

Or comme 2 est racine ***impaire*** de tout nombre premier μ de la forme $8h\pm3$, l'expression $\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$ est une racine primitive de tout nombre premier de cette forme. Comme 2 est racine paire de tout nombre premier de la forme $8h\pm1$, l'expression $\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$ est une racine seconde de tout nombre premier de cette dernière forme.

Si donc on détermine z au moyen de la congruence

$$z\sqrt[\alpha^{m-1}]{2^{\alpha^m}R_k}+1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

elle donne

$$x \equiv \frac{-1}{\sqrt[\alpha^{m-1}]{(2^{\alpha^m} R_k)}} \pmod{\mu}$$

comme racine primitive du nombre premier μ.

§. 13.

En faisant successivement $\alpha = 3$, $\alpha = 5$, $\alpha = 7$, on obtient les théorèmes suivants:

Théorème a. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2.3^m.\beta.\gamma \ldots \varepsilon + 1$ ($\beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ étant des nombres premiers différents entr'eux et plus grands que 3), ***et si la congruence***

$$(1.) \quad 2^{2.3^m} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite: en mettant μ ***sous la forme*** $q^2 + 3p^2$ ***et en désignant par*** x_1 ***et*** y_1 ***une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx + py = 1:$$

1°. l'expression

$$(2.) \quad \sqrt[3^{m-1}]{(2^{3^m-1}\{qy_1 - 3px_1 - 1\})} \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ, ***si ce nombre est de la forme*** $8h \pm 3$;

2°. ***l'expression***

$$(3.) \quad \frac{-1}{\sqrt[3^{m-1}]{(2^{3^m-1}\{qy_1 - 3px_1 - 1\})}} \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ, ***si ce nombre est de la forme*** $8h \pm 1$.

Il est facile de voir que la congruence (1.) ne peut être satisfaite si $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, auxquels cas les expressions (2.) et (3.) représentent une racine primitive du nombre premier μ.

Théorème b. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2.5^m.\beta.\gamma \ldots \varepsilon + 1$ ($\beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ étant également des nombres premiers différents de 5 et 2), ***et si la congruence***

$$(1.) \quad 2^{2.5^m} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite; en mettant μ sous la forme q^2-5p^2 et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée

$$qx+py=1:$$

1°. *l'expression*

$$(2.)\quad \sqrt[5^{m-1}]{\left(2^{5^m-2}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\}\right)} \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ, si ce nombre est de la forme $8h\pm3$;

2°. *l'expression*

$$(3.)\quad \frac{-1}{\sqrt[5^{m-1}]{\left(2^{5^m-2}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\}\right)}} \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ, si ce nombre est de la forme $8h\pm1$.

En supposant successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$, et en remarquant que, dans ces cas, la congruence (1.) ne peut être satisfaite, on est conduit à admettre que les expressions (2.) ou (3.) représentent des racines primitives de μ ($\mu=31$ est la seule exception).

Théorème c. *Si μ est un nombre premier de la forme $2.7^m.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ ($\beta,\gamma,\ldots\varepsilon$ étant également des nombres premiers différents de 7 et 2), et si la congruence*

$$(1.)\quad 2^{2.7^m}-1\equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite:

1°. *l'expression*

$$(2.)\quad \sqrt[7^{m-1}]{\left(2^{7^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$$

dans laquelle

$$R_k\equiv\tfrac{1}{2}z\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(z^2-4)},\quad z\equiv\tfrac{1}{3}(v-1),\quad v^3-21v-7\equiv 0 \pmod{\mu},$$

représentera des racines primitives du nombre premier μ, si ce nombre est de la forme $8h\pm3$;

2°. *l'expression*

$$(3.)\quad \frac{-1}{\sqrt[7^{m-1}]{\left(2^{7^m}R_k\right)}} \pmod{\mu}$$

représentera des racines primitives de μ si ce nombre est de la forme $8h\pm1$.

En supposant successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$ et en remarquant que, dans ces cas, la congruence (1.) ne peut être satisfaite, on est conduit à admettre que les expressions (2.) ou (3.) représentent des racines primitives de μ ($\mu=43$ est la seule exception).

§. 14.

Théorème XIII. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2^2.\alpha^m.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ (α, β, γ, $\ldots$ ε étant également des nombres premiers) ***tel que la congruence***

$$2^{2^2\alpha^m}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est point satisfaite; en posant

$$R_k \equiv \cos\frac{2k\omega}{\alpha}+\sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1} \pmod{\mu}:$$

la valeur de l'expression

$$\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ.

Ce théorème n'est qu'une conséquence du théorème (I.). En effet le nombre premier μ est de la forme $8h-3$ et par suite 2 est une racine impaire de ce nombre et l'expression $\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$ en est une racine primitive.

§. 15.

En faisant successivement $\alpha=3$, $\alpha=5$, $\alpha=7$ on obtient les théorèmes suivants:

Théorème a. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2^2.3^m.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ (β, γ, $\ldots$ ε étant également des nombres premiers plus grand que 3) ***et si la congruence***

$$(1.)\qquad 2^{2^2.3^m}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite: en mettant μ ***sous la forme*** q^2+3p^2 ***et en désignant par*** x_1 ***et*** y_1 ***une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx+py=1:$$

l'expression

$$(2.)\qquad \sqrt[3^{m-1}]{\left(2^{3^m-1}\{qy_1-3px_1-1\}\right)} \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ.

Il est facile de voir que la congruence (1.) ne peut être satisfaite si $m=1$, $m=2$, $m=3$; dans ces cas l'expression (2.) représente une racine primitive de μ.

Théorème b. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2^2.5^m.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ ($\beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ étant également des nombres premiers différents de 5) ***et si la congruence***

$$(1.)\quad 2^{2^2.5^m}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite: en mettant μ ***sous la forme*** q^2-5p^2 ***et en désignant par*** x_1 ***et*** y_1 ***une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx+py=1:$$

l'expression

$$(2.)\quad \sqrt[5^{m-1}]{\left(2^{5^m-2}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\}\right)} \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ.

Il est facile de voir que la congruence (1.) ne peut être satisfaite si $m=1$, $m=2$, $m=3$; dans ces cas l'expression (2.) représente une racine primitive de μ.

Théorème c. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2^2.7^m.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ ($\beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ étant également des nombres premiers différents de 7) ***et si la congruence***

$$(1.)\quad 2^{2^2.7^m}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite, l'expression

$$(2.)\quad \sqrt[7^{m-1}]{\left(2^{7^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$$

dans laquelle

$$R_k \equiv \tfrac{1}{2}z \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(z^2-4)}, \qquad z \equiv \tfrac{1}{3}(v-1), \qquad v^3-21v-7 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ.

Il est facile de voir que la congruence (1.) ne peut être satisfaite si $m=1$, $m=2$, $m=3$; dans ces cas l'expression (2.) représente une racine primitive de μ.

§. 16.

On peut déduire du théoréme (I.) la proposition suivante:

Théorème XIV. ***Si*** μ ***est un nombre premier de la forme*** $2^s\alpha^n+1$ (α étant également un nombre premier) ***la valeur de l'expression***

$$\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left[(r_t)^{\alpha^m}\left(\cos\frac{2k\omega}{\alpha}+\sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1}\right)\right]} \pmod{\mu}$$

est une racine primitive du nombre premier μ, si r_t est une racine impaire de ce nombre.

En supposant $s=1$ et m plus grand que 1; 2 est racine impaire de μ qui est alors de la forme $8h+3$ et l'on peut établir la proposition suivante:

Théorème XV. Si μ est un nombre premier de la forme $2\alpha^m+1$ (α étant un nombre premier et $m>1$), ***la valeur de l'expression***

$$\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(2^{\alpha^m}\left\{\cos\frac{2k\omega}{\alpha}+\sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1}\right\}\right)} \pmod{\mu}.$$

En admettant que α soit successivement égal à 3, 5, 7 on obtient les théorèmes particuliers suivants:

Théorème a. Si μ est un nombre premier de la forme 2.3^m+1, ce nombre pourra également se mettre sous la forme q^2+3p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée

$$qx+py=1:$$

la valeur de l'expression

$$\sqrt[3^{m-1}]{\left(2^{3^m-1}(qy_1-3px_1-1)\right)} \pmod{\mu}$$

sera racine primitive du nombre premier μ.

Théorème b. Si μ est un nombre premier de la forme 2.5^m+1, ce nombre premier pourra également se mettre sous la forme q^2-5p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée

$$qx+py=1:$$

la valeur de l'expression

$$\sqrt[5^{m-1}]{\left(2^{5^m-2}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\}\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive du nombre premier μ.

Théorème c. Si μ est un nombre premier de la forme 2.7^m+1, l'expression

$$\sqrt[7^{m-1}]{\left(2^{7^m}R_k\right)} \pmod{\mu},$$

dans laquelle

$$R_k \equiv \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(z^2-4)}, \quad z \equiv \tfrac{1}{3}(v-1), \quad v^3 - 21v - 7 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ.

§. 17.

On déduit aisément du théorème (II.) la proposition suivante:

Théorème XVI. Si μ ***est un nombre premier de la forme*** $2^s.3^m+1$, ***la valeur de l'expression***

$$r^3\sqrt[3^{m-1}]{(\tfrac{1}{2}(qy_1 - 3px_1 - 1))}$$

sera une racine primitive de μ, ***si*** r ***est une racine impaire de ce nombre et si, en mettant*** μ ***sous la forme*** q^2+3p^2, x_1 ***et*** y_1 ***représentent une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx + py = 1.$$

§. 18.

Si μ est un nombre premier de la forme $2^s\alpha^m+1$ $(s>1)$, dans laquelle α est un nombre premier différent de 3, il est facile de reconnaître que ce nombre premier est de la forme $12h+5$. En effet, en supposant α de la forme $3t+1$, on a $\mu = 12T+2^s+1$; il en résulte que s doit être de la forme $2p$; car s'il en était autrement, le nombre premier μ serait divisible par 3, ce qu'on ne peut admettre. Si donc nous posons

$$2^s\alpha^m+1 = 12h+5 = 12T+2^{2p}+1,$$

il en résultera

$$h = T + \frac{2^{2p-2}-1}{3};$$

égalité qui donne pour h un nombre entier.

En supposant α de la forme $3t+2$, on a $\mu = 12T+2^{s+m}+1$; il en résulte que $s+m$ est de la forme $2p$, car autrement μ serait divisible par 3. Si donc nous posons

$$2^s\alpha^m+1 = 12h+5 = 12T+2^{2p}+1,$$

il en résultera

$$h = T + \frac{2^{2p-2}-1}{3};$$

égalité qui donne pour h un nombre entier.

Il résulte de cette observation que 3 est racine impaire de tout nombre premier de la forme $2^s\alpha^m+1$, et par suite le théorème XIV nous permet d'établir la proposition suivante:

Théorème XVII. *Si μ est un nombre premier de la forme $2^s\alpha^m+1$ ($s>1$ et α un nombre premier différent de 3), la valeur de l'expression*

$$\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(3^{\alpha^m}\left\{\cos\frac{2k\omega}{\alpha}+\sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1}\right\}\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive du nombre premier μ.

En faisant successivement $\alpha=5$, $\alpha=7$ on obtient:

Théorème a. *Si μ est un nombre premier de la forme $2^s.5^m+1$ ($s>1$), ce nombre pourra également être mis sous la forme q^2-5p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée*

$$qx+py=1:$$

l'expression

$$\sqrt[s^{m-1}]{\left(\frac{3^{s^m}}{4}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\}\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive du nombre premier μ.

Théorème b. *Si μ est un nombre premier de la forme $2^s.7^m+1$ ($s>1$), l'expression*

$$\sqrt[7^{m-1}]{\left(3^{7^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$$

dans laquelle

$$R_k\equiv\tfrac{1}{2}z\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(z^2-4)},\quad z\equiv\tfrac{1}{3}(v-1),\quad v^3-21v-7\equiv 0 \pmod{\mu},$$

représentera une racine primitive du nombre premier μ.

§. 19.

On peut encore établir comme cas particulier du théorème (I.) la proposition suivante:

Théorème XVIII. *Si μ est un nombre premier de la forme $2^s.\alpha^m.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ étant des nombres premiers) tel que la congruence*

$$r^{2^s\alpha^m}-1\equiv 0 \pmod{\mu}$$

(dans laquelle r est une racine impaire de μ) *n'est pas satisfaite; en posant*

$$R_k\equiv\cos\frac{2k\omega}{\alpha}+\sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1} \pmod{\mu}:$$

la valeur de l'expression

$$\sqrt[\alpha^{m-1}]{\left(r^{\alpha^m}R_k\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ.

Voici quelques cas particuliers de ce théorème.

Théorème a. *Si le nombre premier* $\mu = 10n \pm 3$ *est de la forme* $2^s.3^m.\beta.\gamma \ldots \varepsilon + 1$, *ce nombre pourra également se mettre sous la forme* $q^2 + 3p^2$, *et en désignant par* x_1 *et* y_1 *une solution particulière de l'équation indéterminée*

$$qx + py = 1:$$

la valeur de l'expression

$$\sqrt[3^{m-1}]{\left(\tfrac{5^{3^m}}{2}(qy_1 - 3px_1 - 1)\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, *si la congruence*

$$5^{2^s.3^m} - 1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Soient $m = 1$ et $s = 3$.

Théorème a'. *Si le nombre premier* $\mu = 10n \pm 3$ (excepté 313) *est de la forme* $2^3.3.\beta.\gamma \ldots \varepsilon + 1$; *ce nombre pourra également se mettre sous la forme* $q^2 + 3p^2$, *et en désignant par* x_1 *et* y_1 *une solution particulière de l'équation indéterminée:*

$$qx + py = 1,$$

la valeur de l'expression

$$\tfrac{5^3}{2}(qy_1 - 3px_1 - 1) \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ.

Soient $m = 1$ et $s = 4$.

Théorème a''. *Si le nombre premier* $\mu = 10n \pm 3$ *est de la forme* $2^4.3.\beta.\gamma \ldots \varepsilon + 1$; *ce nombre pourra également se mettre sous la forme* $q^2 + p^2$, *et en désignant par* x_1 *et* y_1 *une solution particulière de l'équation indéterminée*

$$qx + py = 1:$$

la valeur de l'expression

$$\tfrac{5^3}{2}(qy_1 - 3px_1 - 1) \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ.

Soient $m = 2$ et $s = 3$.

Théorème b. *Si le nombre premier* $\mu = 10n \pm 3$ *est de la forme* $2^3.3^2.\beta.\gamma \ldots \varepsilon + 1$, *ce nombre premier pourra également se mettre sous*

la forme q^2+3p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée

$$qx+py=1:$$

la valeur de l'expression

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5^9}{2}(qy_1-3px_1-1)\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si la congruence

$$5^{72}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Théorème c. ***Si μ est un nombre premier de la forme*** $2^3.5.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ (β, γ, $\ldots$ ε étant également des nombres premiers plus grands que 5), ***ce nombre pourra également se mettre sous la forme q^2-5p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx+py=1:$$

l'expression

$$\frac{3^5}{4}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive du nombre premier μ.

Théorème c'. ***Si μ est un nombre premier de la forme*** $2^4.5.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ (β, γ, $\ldots$ ε étant des nombres premiers plus grands que 5), ***ce nombre pourra également se mettre sous la forme q^2-5p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx+py=1:$$

l'expression

$$\frac{3^5}{4}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive du nombre μ, si la congruence

$$3^{40}+1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Théorème c''. ***Si μ est un nombre premier de la forme*** $2^5.5.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ (β, γ, $\ldots$ ε étant des nombres premiers plus grands que 5), ***ce nombre pourra également se mettre sous la forme q^2-5p, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée***

$$qx+py=1:$$

l'expression

$$\frac{3^5}{4}\{qy_1+5px_1-1+\sqrt{(-10-2(qy_1+5px_1))}\} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive du nombre premier μ, si la congruence

$$(3^{80}+1)(3^{40}+1) \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Théorème d. *Si μ est un nombre premier de la forme $2^3.7.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$ (β, γ, $\ldots$ ε étant des nombres premiers différents de 3), l'expression*

$$3^7 R_k \pmod{\mu},$$

dans laquelle

$$R_k \equiv \tfrac{1}{2}z \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(z^2-4)}, \quad z \equiv \tfrac{1}{3}(v-1), \quad v^3-21v-7 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

représentera une racine primitive de μ.

Théorème d'. *Si le nombre premier $\mu = 28n \pm 5$ ou $28n \pm 11$ ou $28n \pm 13$ est de la forme $2^s.3^m.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$, ce nombre premier pourra également se mettre sous la forme q^2+3p^2, et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée*

$$qx+py = 1:$$

la valeur de l'expression

$$\sqrt[3^{m-1}]{\left(\frac{7^{3^m}}{2}(qy_1-3px_1-1)\right)} \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ, si la congruence

$$7^{2^s.3^m}-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

n'est pas satisfaite.

Soient $m=1$ et $s=3$.

Théorème d''. *Si le nombre premier $\mu = 28n \pm 5$ ou $28n \pm 11$ ou $28n \pm 13$ est de la forme $2^3.3.\beta.\gamma\ldots\varepsilon+1$, ce nombre premier pourra également se mettre sous la forme q^2+3p^2 et en désignant par x_1 et y_1 une solution particulière de l'équation indéterminée*

$$qx+py = 1,$$

la valeur de l'expression

$$\frac{7^3}{2}(qy_1-3px_1-1) \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ.

Théorème d'''. *Si le nombre premier* $\mu = 44n \pm 3$ *ou* $44n \pm 13$ *ou* $44n \pm 15$ *ou* $44n \pm 17$ *ou* $44n \pm 21$ *est de la forme* $2^3.3.\beta.\gamma \ldots \varepsilon + 1$ *ce nombre pourra également se mettre sous la forme* $q^2 + 3p^2$, *et en designant par* x_1 *et* y_1 *une solution particulière de l'équation indéterminée*

$$qx + py = 1:$$

la valeur de l'expression

$$\frac{11^3}{2}(qy_1 - 3px_1 - 1) \pmod{\mu}$$

sera une racine primitive de μ.

Genève 23 Février 1854.

13.

Recherches sur la résolution des équations de tous les degrés.

(Par M. le colonel *F. Theremin* à Saratoff en Russie.)

Contenu des articles.

Art. I. Recherche d'une expression générale des racines d'une équation d'un degré quelconque, en fonction des coefficients de l'équation, et des racines d'une équation auxiliaire.

Art. II. Application à l'équation générale du second degré. — But qu'il faut se proposer.

Art. III. Déduction d'une expression générale des racines d'une équation d'un degré quelconque, en fonction d'une quantité entièrement arbitraire α.

Art. IV. Parti que l'on peut tirer de cette expression générale, qui est une série. — Approximation linéaire. — Déduction d'une nouvelle série plus simple.

Art. V. Examen général des formes et des propriétés des lieux géométriques des équations.

Art. VI. Propriétés correspondantes des équations et des lieux géométriques qu'elles représentent. — Démonstration géométrique de la règle des signes, employée par *Fourrier* pour la séparation des racines.

Art. VII. Choix de la quantité arbitraire; — détermination des racines, lorsque toutes celles de l'équation sont réelles. — Application à une équation du 3me degré. — Observation sur le tracé des lieux gométériques.

Art. VIII. Examen du cas des racines égales, et de celui des racines imaginaires ou manquantes. — Points singuliers simples et composés. Règle pour s'assurer si deux racines sont égales ou inégales ou imaginaires, quand le lieu géométrique de l'équation a un point de maximum ou de minimum, très près de l'axe des x.

Art. IX. Convergence de la formule. — Moyen de s'assurer du nombre de chiffres décimaux exacts, à chaque opération.

Art. X. Application à une équation du 7me degré.

Art. XI. Emploi de la méthode pour l'extraction des racines d'un degré quelconque. — Application.

Essai sur la résolution des équations de tous les degrés.

I.

La résolution d'une équation peut s'entendre de deux manières:

1°. Ou l'on se propose de trouver l'inconnue x d'une manière générale en fonction des coefficients de l'équation; — ou,

2°. On se propose de déterminer successivement chacune des racines de cette équation.

La détermination des racines est toujours le but final de la résolution d'une équation, parconséquent la recherche de l'expression générale de l'inconnue en fonction des coefficients, ne forme que la première partie du problême proposé, et la solution finale doit pouvoir se déduire de cette expression générale.

Examinons successivement ces deux parties du problême, et proposons nous d'abord, de trouver l'expression générale de l'inconnue x, d'une équation d'un degré quelconque m, en fonction des coefficients de cette équation.

L'équation générale du degré m est:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx^2 + Lx + M = 0$$

dans laquelle m est un nombre entier positif, et où A, B, C, etc. M sont des nombres réels, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

Si l'on suppose pour un moment que la quantité M devienne variable et qu'on la désigne par $-y$, en la faisant passer dans le second membre, on aura:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx^2 + Lx = y$$

équation qui correspond à la proposée dans le cas où la variable y devient égal à $-M$.

Le problême se trouve donc ramené à trouver l'expression de la variable x en fonction de la variable y, expression que nous désignerons d'une manière générale par:

$$x = f(y).$$

Si nous désignons par: $f'(y)$, $f''(y)$, etc. les dérivées successives de $f(y)$, et par: $f(y)_0$, $f'(y)_0$, $f''(y)_0$, etc. ce que deviennent cette fonction

et ses dérivées quand on y fait $y = 0$, nous aurons en général par la série de *Maclaurin*, l'expression

$$x = f(y)_0 + \frac{f'(y)_0}{1} y + \frac{f''(y)_0}{1.2} y^2 + \frac{f'''(y)_0}{1.2.3} y^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle il s'agit de déterminer les termes $f(y)_0$, $f'(y)_0$, etc.

Pour cela reprenons l'équation générale:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots Kx^2 + Lx = y,$$

nous aurons en différentiant:

$$(mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots\ldots 2Kx + L)\,dx = dy,$$

d'où l'on tire:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots\ldots 2Kx + L},$$

et parconséquent:

$$f'(y) = \frac{1}{mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots\ldots 2Kx + L}.$$

Si l'on fait pour abréger:

$$X = x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots Lx + m,$$

et que l'on désigne par X', X'', etc. les dérivées successives de ce polynome, il est évident que l'expression ci-dessus deviendra:

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) = \frac{1}{X'},$$

et que par la différentiation on en tirera successivement

$$\frac{d^2x}{dy^2} = f''(y) = -\frac{X''}{X'^3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = f'''(y) = +\frac{(3X''^2 - X'X''')}{X'^5},$$

. . . . . .

Pour savoir maintenant ce que deviennent $f(y)$ et ses dérivées successives quand on y fait $y = 0$, reprenons l'équation générale en x et en y, et posons y $y = 0$, nous aurons:

$$(1.) \qquad x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots Kx^2 + Lx = 0,$$

et, comme x est facteur commun, nous aurons séparément:

$$x = 0,$$

et:

$$x^{m-1} + Ax^{m-2} + \ldots\ldots Kx + L = 0.$$

La première de ces équations donne:

$$x = f(y)_0 = 0$$

et réduit les quantités X', X'', X''', etc. au terme indépendant de x.

La seconde équation est, comme on voit, d'un degré moins élevé de l'unité, que celui de l'équation donnée, et il est évident qu'en nommant α, β, γ, etc. les $m-1$ racines de cette équation, il faudra successivement substituer ces racines au lieu de x, dans les polynomes X', X'', X''', etc. et nous obtiendrons par là autant de valeurs correspondantes des quantités: $f'(y)_0$, $f''(y)_0$, etc.

De cette manière, on voit que la résolution de l'équation générale du degré m, dépend de la résolution d'une autre équation, qui est aussi du degré m, mais dont l'une des racines est constamment égale à zéro, et qui se réduit parconséquent à une équation d'un degré $m-1$; — nous nommerons *auxiliaire* l'équation (1.) dont dépend la résolution de l'équation donnée.

Chacune des racines de l'équation auxiliaire réduit à zéro la fonction y, et si nous désignons en général l'une quelconque de ces racines par r, et par

$$X_{(r)}, \quad X'_{(r)}, \quad X''_{(r)}, \quad \text{etc.},$$

ce que deviennent X et ses dérivées quant on y substitue r au lieu de x, alors l'expression générale de x en y deviendra:

$$x = r + \frac{1}{X'_{(r)}} \cdot \frac{y}{1} - \frac{X''_{(r)}}{X'^3_{(r)}} \cdot \frac{y^2}{1.2} + \frac{(3X''^2_{(r)} - X'_{(r)} X'''_{(r)})}{X'^5_{(r)}} \frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et, comme dans le cas de l'équation donnée la variable y devient égale à $-M$, on aura:

$$(2.)^* \quad x = r - \frac{1}{X'_{(r)}} \cdot \frac{M}{1} - \frac{X''_{(r)}}{X'^3_{(r)}} \cdot \frac{M^2}{1.2} - \frac{(3X''^2_{(r)} - X'_{(r)} X'''_{(r)})}{X'^5} \frac{M^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

pour l'expression générale de toutes les racines de l'équation du degré m.

Il est bon d'observer que l'une des racines (r) de l'équation auxiliaire étant toujours égale à zéro, on a directement l'une des racines de la proposée en faisant: $r = 0$ dans l'expression (2.); — les $m-1$ racines restantes, dépendront des $m-1$ valeurs de r autres que zéro, et qui sont les racines d'une équation d'un degré $m-1$.

On voit que l'expression de x est de la plus grande généralité possible, puisqu'elle est indépendante de toute hypothèse, non seulement sur la valeur des coefficients, mais même sur le degré de l'équation proposée. — Sans doute, vu la généralité du problême, on ne pouvait pas s'attendre à une expression,

soit finie, soit plus explicite, mais on peut dès à présent considérer comme résolue la première partie du problème, sauf à ramener l'expression générale (2.) soit à une formule finie, soit à une série convergente et d'une application facile à la détermination numérique des racines.

II.

Avant de pousser plus loin ces recherches, et comme vérification de la méthode proposée, faisons l'application de l'expression générale (2.), à la détermination de l'inconnue dans l'équation générale du second degré:

$$x^2 + Ax + B = 0.$$

Nous voyons d'abord que les polynomes X, X', X, etc. deviennent dans ce cas particulier:

$$X = x^2 + Ax + B,$$
$$X' = 2x + A,$$
$$X'' = 2,$$
$$X''' = 0,$$ aussi bien que toutes les dérivées suivantes.

De plus, l'équation auxiliaire est ici

$$x^2 + Ax = 0$$

qui donne: $x = 0$, et $x + A = 0$, d'où l'on tire $x = -A$.

En mettant ces deux valeurs de x dans X' et X'', on aura:

pour $x = 0$	et	pour $x = -A$,
$X' = +A$		$X' = -A$,
$X'' = +2$		$X'' = +2$.

En mettant ces valeurs dans l'expression générale (2.), on aura:

pour $x = 0$

$$x = 0 + \frac{1}{A}\cdot\frac{y}{1} - \frac{2}{A^3}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{3.(2)^2}{A^5}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} - \frac{3.5.(2)^3}{A^7}\cdot\frac{y^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

et pour $x = -A$

$$x = -A - \frac{1}{A}\cdot\frac{y}{1} + \frac{2}{A^3}\cdot\frac{y^2}{1.2} - \frac{3.(2)^2}{A^5}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} + \frac{3.5.(2)^3}{A^7}\cdot\frac{y^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

Mais en observant que le premier terme de la première de ces expressions, qui est zéro, peut être remplacé par: $-\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A$, et que le premier terme $-A$ de la seconde peut être remplacé par $-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A$, on verra qu'en faisant cette substitution, le premier terme de chacune des deux séries sera $-\frac{1}{2}A$, et que tous les termes suivants dans les deux séries sont égaux

un à un mais de signes contraires, parconséquent les deux valeurs de x pourront être réunies en une seule expression qui sera:

$$x = -\tfrac{1}{2}A \pm \left\{\tfrac{1}{2}A + \frac{1}{A}\cdot\frac{y}{1} - \frac{2}{A^3}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \frac{3.(2)^2}{A^5}\cdot\frac{y^3}{1.2.3} - \ldots\ldots\right\},$$

et qui deviendra l'expression des racines de l'équation donnée, quand on y fera $y = -B$; — faisant cette substitution et réduisant, il vient:

$$x = -\tfrac{1}{2}A \pm \left\{\tfrac{1}{2}A - \frac{B}{A} - \frac{B^2}{A^3} - \frac{2B^3}{A^5} - \frac{5B^4}{A^7} - \ldots\ldots\right\}.$$

Mais avec un peu d'attention on voit que la quantité comprise entre parenthèses n'est autre chose que le développement en série du radical:

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B)} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\tfrac{1}{4}(A^2 - 4B)},$$

parconséquent l'expression trouvée se réduit à:

$$x = -\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - 4B)}$$

qui est l'expression connue des racines de l'équation du second degré.

Au moyen du développement (2.) on pourrait facilement déduire les séries générales qui exprimeraient les racines de l'équation du 3me degré, puis de celles du 4me du 5me, et ainsi de suite, comme nous l'avons fait pour l'équation du 2^{d} degré; mais, pour que ces séries puissent servir à la détermination numérique des racines, il faut nécessairement que l'on parvienne à remplir l'une des deux conditions suivantes:

1°. Il faut que les séries soyent, ou puissent être rendus convergentes; — ou bien:

2°. Il faut qu'elles puissent se transformer, comme pour le second degré, en formules finies, algèbriques, qui donneraient les racines de la proposée par un nombre fini d'opérations arithmétiques.

Mais on comprendra facilement, que l'opération de ramener à une expression finie les développements des racines des équations, d'un degré supérieur au second, ne serait tout au plus possible que pour les équations du 3me et peut être pour celles du 4me degré (ce qui est même fort douteux), mais que cette transformation deviendrait entièrement impossible pour les degrés supérieurs. — D'ailleurs, en admettant même la possibilité de cette transformation pour tous les degrés de l'échelle infinie des nombres, il faudrait déduire autant de formules différentes qu'il y a de nombres, c'est à dire une infinité, et parconséquent la question ne serait jamais résolue.

De même, si l'on cherche à rendre convergent le développement des racines d'une équation d'un degré déterminé, par exemple du 3me, il faudra de nouvelles recherches pour le 4me, puis pour le cinquième, et ainsi de suite à l'infini.

Il est donc inutile de s'occuper de recherches semblables, et les efforts de l'analyse doivent tendre: soit à rendre convergente l'expression générale (2.), soit à découvrir une autre série convergente, indépendemment de toute hypothèse sur le degré de l'équation. — C'est ce que je vais tâcher de faire dans les articles suivants.

III.

L'expression (2.) donne la racine de l'équation au moyen d'une suite infinie de termes, formés des coefficients de l'équation et de l'une des racines de l'équation auxiliaire; chacun des termes à partir du second est multiplié par l'une des puissances successives de M, et divisé par l'une des puissances successives impaires de $X'_{(r)}$, de manière que le second terme a pour facteur: $\frac{M}{X'_{(r)}}$, le troisième: $\frac{M^2}{X'^3_{(r)}}$, le quatrième: $\frac{M^3}{X'^5_{(r)}}$, etc., d'où l'on voit que l'une des premières conditions de la convergence serait que: $X'_{(r)}$ fût plus grand que M, abstraction faite du signe de ces quantités; — or, cette condition ne saurait évidemment être remplie qu'accidentellement, puisque M est un nombre donné qu'on ne saurait changer, et que $X'_{(r)}$ est une quantité qui dépend de la racine r de l'équation auxiliaire, supposée connue. — Mais nous allons voir qu'on peut facilement déduire un autre série de forme semblable, et qui jouit de la propriété de pouvoir être rendue aussi convergente qu'on voudra.

Pour cela reprenons l'équation donnée, et supposons que le second membre de cette équation au lieu d'être zéro, soit une variable y, nous aurons:

$$(3.) \quad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx^2 + Lx + M = y.$$

Cette équation est celle d'une courbe dont x est l'abscisse et y l'ordonnée, et les racines de l'équation proposée correspondront au cas de $y = 0$, c'est à dire seront les abscisses des points où la courbe coupe ou touche l'axe des abscisses.

Soit α une quantité arbitraire quelconque prise pour abscisse de la courbe, et δ l'ordonnée correspondante, on aura:

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + \ldots\ldots + K\alpha^2 + L\alpha + M = \delta$$

en retranchant cette équation de l'équation (3.), on aura:

$$(4.)\quad x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots + Kx^2 + Lx + M$$
$$-(\alpha^m + A\alpha^{m-1} + \ldots\ldots K\alpha + L\alpha + M) = y - \delta.$$

Si nous posons: $y - \delta = z$, nous pourrons considérer z comme une nouvelle variable, tandis que α conservera une valeur constante, et nous aurons d'après la série de *Maclaurin:*

$$x = f(z)_0 + f'(z)_0 \frac{z}{1} + f''(z)_0 \frac{z^2}{1.2} + f'''(z)_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

développement dans lequel il s'agit de déterminer la fonction $f(z)$ et ses derivées dans le cas où l'on y fait $z = 0$.

Si l'on différentie l'équation (4.) en mettant dans le second membre z au lieu de $y - \delta$, on aura:

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots\ldots 2Kx + L = \frac{dz}{dx},$$

ou bien

$$X' = \frac{dz}{dx}, \quad \text{d'où l'on tire:} \quad \frac{dx}{dz} = f'(z) = \frac{1}{X'},$$

et successivement:

$$f''(z) = -\frac{X''}{X'^3}, \quad f'''(z) = +\frac{(3X''^2 - X'X''')}{X'^5}, \ldots\ldots$$

Pour savoir ce que deviennent ces dérivées et la fonction primitive $f(z)$ quand on y fait $z = 0$, il faut égaler à zéro le second membre de l'équation (4.) d'où l'on tire:

$$y = \delta$$

et

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots + Lx + M - (\alpha^m + A\alpha^{m-1} + \ldots\ldots + L\alpha + M) = 0.$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme:

$$(5.)\quad x^m - \alpha^m + A(x^{m-1} - \alpha^{m-1}) + \ldots\ldots + L(x - \alpha) = 0,$$

cette équation étant évidemment divisible par $x - \alpha$, il s'ensuit que nous aurons

$$x = \alpha, \text{ pour l'une des valeurs de: } x = f(z)_0,$$

et les autres $m-1$ valeurs seront les $m-1$ racines de l'équation qui résultera de la division de l'équation (5.) par: $x - \alpha$.

L'équation (5.) est évidemment l'équation auxiliaire de la proposée, il y a seulement cette différence entre l'équation (1.) et celle-ci, que dans la première, l'une des racines est constamment égale à zéro, tandis que dans

la dernière l'une des racines est constamment égale à la quantité arbitraire α. — Nous verrons que l'introduction de cette quantité arbitraire dispense de la recherche des $m-1$ racines restantes de l'équation auxiliaire.

Mettant donc α au lieu de $f(z)_0$, et désignant par $X'_{(\alpha)}$, $X''_{(\alpha)}$, etc. les dérivées du polynome X quand on y fait $x=\alpha$, nous aurons:

$$x = \alpha + \frac{1}{X'_{(\alpha)}}\cdot\frac{z}{1} - \frac{X''_{(\alpha)}}{\overline{X'}^3_{(\alpha)}}\cdot\frac{z^2}{2.3} + \frac{(3\overline{X''}^2_{(\alpha)} - X'_{(\alpha)}X'''_{(\alpha)})}{\overline{X'}^5_{(\alpha)}}\frac{z^3}{1.2.3} - \ldots\ldots$$

pour l'expression de x en fonction de la variable z et de la quantité arbitraire α; — mais, comme x devient une des racines de la proposée chaque fois que l'ordonnée y devient zéro, il s'ensuit que pour avoir l'expression de la racine il faut faire $y=0$ dans l'équation $z=y-\delta$, ou substituer $-\delta$ à z dans le développement ci-dessus; — enfin, comme δ n'est autre chose que l'ordonnée de la courbe au point dont l'abscisse est α, et qu'on obtient la valeur de cette ordonnée en mettant α au lieu de x dans le polynome X, on voit que z doit être remplacé par $-X_{(\alpha)}$, et l'on aura enfin:

$$(6.)\qquad x = \alpha - \frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}} - \frac{1}{2}\frac{\overline{X}^2_{(\alpha)}X''_{(\alpha)}}{\overline{X'}^3_{(\alpha)}} - \frac{1}{2.3}\frac{\overline{X}^3_{(\alpha)}(3\overline{X''}^2_{(\alpha)} - X'_{(\alpha)}X'''_{(\alpha)})}{\overline{X'}^5_{(\alpha)}} - \ldots\ldots$$

pour l'expression générale de l'une des racines d'une équation d'un degré quelconque m, en fonction d'une quantité entièrement arbitraire α.

Le développement (2.) précédemment trouvé, avait tous ses termes déterminés par les racines de l'équation auxiliaire (1.); — dans le nouveau développement (6.) la quantité α dont les termes dépendent, étant arbitraire, représente non seulement toutes les racines de l'équation auxiliaire, mais tel nombre qu'on voudra, et peut parconséquent être choisie à volonté de la manière la plus convenable au but que l'on se propose, et, nous verrons dans les articles suivants, que c'est du choix de cette quantité que dépend la rapidité du calcul des racines de l'équation proposée.

IV.

Voyons le parti qu'on peut tirer du développement (6.), pour obtenir la racine de l'équation avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

Pour cela, considérons une portion *CIC* fig. 1 (*A*) de la courbe qui représente l'équation donnée, vers l'un des points, *I*, où cette courbe coupe l'axe des x, c'est à dire vers un des points pour lesquels la variable x devient une des racines *OI* de l'équation proposée, et supposons que la

quantité α qui est arbitraire, et qui forme le premier terme de la série (6.), soit moindre que l'abscisse OI, ou que la racine, et égale à une abscisse Om; — supposons de plus qu'entre n et I la courbe ne présente aucun point singulier.

Si l'on élève une perpendiculaire à l'axe des x, au point m, extrêmité de l'abscisse α; la partie mn de cette perpendiculaire interceptée par l'axe et la courbe, sera l'ordonnée de cette dernière et son expression analytique est $X_{(\alpha)}$; — ensuite, si par le point n on mène à la courbe la touchante tt', cette touchante coupera l'axe des x en un point t', et la distance mt' sera la soustangente de la courbe pour le point dont α est l'abscisse; — mais, puisque $X'_{(\alpha)}$ représente la tangente trigonométrique de l'angle que la touchante tt' fait avec l'axe des x, l'expression de la soustangente sera $\frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$, ce qui est justement le second terme du développement (6.) déduit à l'article précédent.

Il faut observer que dans la position de la courbe indiquée dans la fig. 1 (A) l'ordonnée $X_{(\alpha)}$ est positive, et la quantité $X'_{(\alpha)}$ est négative, c'est pourquoi le second terme de la série (6.) dans ce cas particulier devra prendre le signe $+$, de manière que, comme on le voit dans la figure, la première partie de l'approximation de la racine cherchée OI, sera $Om+mt'$ ou $\alpha+\frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$, c'est à dire la somme de la quantité arbitraire α et de la soustangente.

Si la courbe était située de la manière qu'on voit dans (B) fig. 1, alors l'ordonnée mn ou $X_{(\alpha)}$ serait négative, et la quantité $X'_{(\alpha)}$ serait au contraire positive, parconséquent dans ce cas là, le second terme de la série (6.) prendra encore le signe positif.

Si la courbe, au lieu de tourner sa convexité vers l'origine des coordonnées comme en (A) et (B), tournait au contraire sa concavité vers ce point, comme on le voit en (C) et en (D) fig. 1, alors le terme $\frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$ serait aussi positif, puisque l'ordonnée et la tangente trigonométrique de l'angle que la touchante avec l'axe des x, sont de signes contraires, mais la soustangente dépasserait le point d'intersection I de la courbe avec l'axe, et parconséquent: la somme des deux premiers termes du développement, surpassera la racine, tandis que dans les deux cas examinés précédemment, la somme des deux premiers termes était moindre que la racine.

Dans les quatre cas que nous venons d'examiner, l'abscisse *om* ou α était supposée moindre que la racine cherchée. Si au contraire cette abscisse était plus grande comme en (A'), (B'), (C') et (D') (fig. 1) il est facile de voir que pour les cas (A') et (B') la première approximation donnerait pour la somme des deux 1ers termes du développement une quantité $Om - mt' = Ot'$, moindre que la racine OI, tandis que dans les cas (C') et (D') on aurait $Om - mt' = Ot'$ plus grand que la racine cherchée.

Dans l'un comme dans l'autre cas, le reste du développement exprime la différence entre la racine cherchée, et la somme algébrique des deux premiers termes de ce développement.

On voit, que si la quantité α dont on est parti n'est pas beaucoup différente de la racine, la somme algébrique des deux premiers termes de la série donnera toujours une valeur qui différera encore moins de la racine que la quantité α elle même; — d'après cela, au lieu de chercher à construire ou à calculer les termes suivants de la série, il est beaucoup plus simple, de prendre la somme algébrique des deux premiers termes: $\alpha \pm \frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$ pour une nouvelle quantité arbitraire que nous nommerons α', et qui mise dans l'expression (6.) donne:

$$x = \alpha' - \frac{X_{(\alpha')}}{X'_{(\alpha')}} - \frac{X^2_{(\alpha')} X''_{(\alpha')}}{2.\overline{X'}^3_{(\alpha')}} - \ldots\ldots$$

Mais, en nous arrêtant au second terme, et posant:

$$\alpha' - \frac{X_{(\alpha')}}{X'_{(\alpha')}} = \alpha''$$

nous pourrons former une nouvelle série en prenant pour quantité arbitraire la quantité α'' plus approchée de la racine que α', et nous aurons:

$$x = \alpha'' - \frac{X_{(\alpha'')}}{X'_{(\alpha'')}} - \frac{X^2_{(\alpha'')} X''_{(\alpha'')}}{2.\overline{X'}^3_{(\alpha'')}} - \ldots\ldots$$

et ainsi de suite; — enfin remplaçant α'' par sa valeur en α', et α' par sa valeur en α, nous aurons le nouveau développement:

$$(7.) \quad x = \alpha - \frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}} - \frac{X_{(\alpha')}}{X'_{(\alpha')}} - \frac{X_{(\alpha'')}}{X'_{(\alpha'')}} - \frac{X_{(\alpha''')}}{X'_{(\alpha''')}} - \ldots.$$

dont la convergence est évidente, puisque les termes $\frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}, \frac{X_{(\alpha')}}{X'_{(\alpha')}}, \ldots\ldots$ ne sont autre chose que les soustangentes de la courbe, en des points, dont les abscisses ont ces soustangentes pour différences.

Il faut ici faire deux observations importantes.

1°. Quand l'extrêmité de l'abscisse α se trouve située du côté vers lequel la courbe tourne sa concavité, alors, la première approximation fait passer la quantité α' qui en résulte, de l'autre côté du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, et fait parconséquent rentrer ce cas, dès la première approximation, dans celui où le point de départ est du côté de la convexité; et, pour ce dernier cas, il est évident que chaque nouvelle approximation s'approchera de la racine, sans la dépasser jamais, soit que α soit plus grand, soit qu'il soit moindre que la racine.

2°. Quand le point de départ, ou l'extrêmité de l'abscisse α, est situé du côté de la convexité de la courbe, quelque grande que soit la différence entre la racine, et α, s'il ne se trouve d'ailleurs aucun point singulier sur la portion de courbe correspondante à ces deux points, on approchera de la racine assez rapidement, et chaque nouvelle valeur approchée $\alpha^{(n)}$ sera comprise entre la valeur approchée précédente $\alpha^{(n-1)}$, et la racine.

Si entre l'extrêmité de l'abscisse arbitraire α, et la racine, la portion correspondante de la courbe présentait un point singulier, il pourrait arriver que la quantité $X'_{(\alpha)}$, ou l'une des suivantes $X'_{(\alpha')}$, $X'_{(\alpha'')}$, etc. devienne zéro, ce qui rendait le résultat infini, et parconséquent ne ferait pas connaître la racine. — On voit donc, qu'avant d'aller plus loin, et pour être guidé dans le choix de la quantité arbitraire α, qui doit servir de point de départ au calcul de chaque racine, il est indispensable d'étudier les formes et les propriétés de la courbe qui correspond à une équation d'un degré quelconque m, et les phénomenes de courbure qu'elle peut présenter. — C'est ce que nous allons faire dans les articles suivants.

V.

Commençons donc par examiner les propriétés et les formes générales des courbes qui correspondent à l'équation générale:

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Kx^2 + Lx + M = y.$$

1°. Nous voyons d'abord que si l'on fait croître l'abscisse x par degrés insensibles depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$, les valeurs correspondantes de y seront toutes réelles, et parconséquent la courbe est continue depuis $x = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $x = +\frac{1}{0}$.

2°. L'équation donnant directement la valeur de l'ordonnée y, au 1er degré, il ne saurait parconséquent y avoir plus d'une valeur de y, pour

une seule et même valeur de x; — ainsi, la courbe n'aura pas de parties rentrantes dans le sens des x, c'est à dire telles que x diminue après avoir augmenté, car si cela était, il y aurait des ordonnées qui couperaient la courbe en deux points, ou plus, et alors y aurait plus d'une valeur correspondante à la même abscisse, ce qui ne peut être.

3°. La courbe en aucun de ses points ne peut avoir de tangente perpendiculaire à l'axe des x, hormis aux points extrêmes dont les abscisses sont $+\frac{1}{0}$ et $-\frac{1}{0}$.

En effet, en différentiant l'équation générale ci-dessus, on trouve:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \cdots\cdots 2Kx + L$$

pour l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle que la touchante à la courbe fait avec l'axe des x, et puisque m est un nombre entier positif, il s'ensuit que l'expression de $\frac{dy}{dx}$ ne peut devenir infinie pour aucun autre point, que pour ceux pour lesquels on a $x = \pm\frac{1}{0}$.

4°. La courbe ne peut avoir aucun point de rebroussement, car d'abord, si la courbe avait un point de rebroussement dont la tangente fut inclinée ou parallèle à l'axe des x, il y aurait nécessairement des ordonnées qui couperaient la courbe en deux points, ce qui ne se peut vu la forme de l'équation; — secondement il ne peut y avoir de point de rebroussement dont la tangente soit perpendiculaire à l'axe des x, puisque nous venons de prouver que la courbe ne peut avoir de tangentes de cette direction.

5°. Enfin, la courbe ne peut avoir de points multiples, puisque en de tels points, la courbe a deux tangentes, et il faudrait que $\frac{dy}{dx}$ puisse avoir deux valeurs différentes, pour une seule et même valeur de x, ce qui est évidemment impossible.

Il résulte de cela que la courbe ne saurait avoir d'autres points singuliers, que des points d'inflexion dont la tangente est inclinée ou parallèle à l'axe des x, mais jamais perpendiculaire, et, des points de maximum ou de minimum.

Après avoir ainsi examiné d'une manière générale les courbes qui correspondent à une équation d'un degré quelconque, examinons la différence caractéristique de celles, qui représentent les équations des degrés *impairs*

de l'échelle des nombres, avec celles qui correspondent aux équations des degrés pairs.

Soit d'abord: $m = 2n+1$, c'est à dire un nombre impair quelconque: — il est évident qu'en faisant: $x = \frac{1}{0}$, on aura aussi: $y = -\frac{1}{0}$, ce qui prouve que la courbe a une branche descendente qui se prolonge à l'infini dans la région des $(-X, -Y)$ désignant par là, la portion du tableau comprise entre les axes des x et celui des y négatifs. — Mais si l'on suppose au contraire que x devienne égal à $+\frac{1}{0}$, on voit que y devient aussi égal à $+\frac{1}{0}$, ce qui prouve que l'autre branche de la courbe est ascendante et s'étend à l'infini aussi, dans la région $(+X, +Y)$.

La courbe, correspondant à une équation du degré $2n+1$, doit couper l'axe des x en $2n+1$ points, si l'on suppose que toutes les racines de l'équation sont réelles et inégales; — parconséquent il faut que cette courbe ait n points de maximum, et n points de minimum, comme on le voit dans la fig. 2, qui représente la forme générale d'une courbe correspondante à une équation du 7me degré pour laquelle on aurait $n = 3$, et dont toutes les racines seraient réelles et inégales.

Cette courbe a comme on voit trois points de maximum: m, m'', m^{IV}, et trois points de minimum: m', m''', m^{V}, entre la branche descendante pD et la branche ascendante $p^{VI}A$, et il est évident qu'il ne saurait y en avoir davantage, car alors l'axe des x pourrait couper la courbe en plus de 7 points, ce qui est impossible, puisque l'équation n'a que 7 racines.

Il doit être bien entendu, que puisque l'on peut donner une infinité de valeurs différents aux coefficients d'une même équation, les sinuosités pmp', $p'm'p''$, etc. peuvent aussi varier d'une infinité de manières différentes, et devenir, soit séparément, soit simultanément, extrêmement grandes ou extrêmement petites, égales ou inégales, et même nulles; — il peut arriver aussi que quelques unes des sinuosités au lieu de couper l'axe des x, ne fassent que le toucher, ou même s'en approchent sans le couper ni le toucher, et nous examinerons plus tard ces cas divers; — mais, aucune de ces sinuosités ne peut devenir infinie, puisque les coefficients de l'équation sont toujours des nombres finis.

J'avertis d'ailleurs, que dans ce qui précède comme dans ce qui va suivre, nous supposerons que les racines de l'équation sont toutes réelles et inégales, et que nous verrons plus tard de quelle manière la courbe caractérise les autres cas.

Suppposons maintenant que l'equation soit d'un degré *pair*, $m = 2n$; en faisant: soit $x = -\frac{1}{0}$, soit $x = +\frac{1}{0}$, on trouve $y = +\frac{1}{0}$; — d'où il suit que la courbe a deux branches ascendentes, l'une dans la région $(+X, +Y)$ comme la courbe qui représente l'équation d'un degré impair, l'autre dans la région des $(-X, +Y)$ et qui remplace la branche descendente de la courbe du degré impair.

Cette courbe devant couper l'axe des x en un nombre de points qui ne peut dépasser $2n$, doit avoir entre ses deux branches ascendentes un nombre n de points de minimum, et $n-1$ points de maximum, comme on peut le voir à la fig. 3 qui représente une équation du 8me degré, pour laquelle $n = 4$; — tout ce que nous avons dit ci-dessus au sujet des variations que peuvent éprouver les sinuosités de la courbe d'un degré impair, convient également aux courbes des équations des degrés pairs.

Ainsi, les courbes des équations des degrés *pairs*, auront constamment deux branches ascendantes, qui s'étendront vers $+\frac{1}{0}$ et vers $-\frac{1}{0}$, et les courbes de degrés impairs auront constamment une seule branche ascendante qui s'étendra du côté des x positifs jusqu'à $+\frac{1}{0}$, et une branche descendante qui s'étendra aussi jusqu'à $-\frac{1}{0}$ du côté des x négatifs.

VI.

Après avoir examiné les formes générales et le genre de courbure qu'affectent les courbes correspondantes aux équations de tous les degrés, tant pairs qu'impairs, il est nécessaire de faire connaître d'autres propriétés générales des équations et des courbes correspondantes, sans lesquelles l'utilité de la formule (7.) deviendrait illusoire.

En effet, nous avons vu que la formule (7.) donne un résultat convergent, pourvu qu'entre l'extrêmité de l'abscisse arbitraire (α) qui sert de base à la série, et le point correspondant à la racine cherchée, il n'y ait aucun point singulier: — or, puisque la racine cherchée est inconnue, on ne peut juger à priori si la quantité (α) satisfait ou non à cette condition, et, comme l'équation a un nombre m de racines, et qu'il faudra pour les déterminer faire sur la valeur de (α) un pareil nombre d'hypothèses différentes, l'incertitude de la condition se répettera chaque fois. — Il peut arriver encore, que deux, et même plusieurs des hypothèses que l'on pourrait faire sur α, conduisent à la même racine de l'équation, et enfin, si par hazard la valeur

attribuée à α était celle de l'abscisse d'un point de maximum ou de minimum, la série deviendrait infinie et ne donnerait aucune racine.

On voit donc qu'il est indispensable d'avoir une règle pour guider dans le choix des valeurs qu'il faut attribuer à la quantité arbitraire α, afin d'être sur que chacune de ces valeurs donnera nécessairement l'une des différentes racines de l'équation; — en d'autres termes, il faut découvrir une règle par laquelle on puisse assigner les limites entre lesquelles il faut choisir les valeurs de (α), pour que chacune de ces valeurs donne la racine correspondante, au moyen de la formule (7.).

Pour cela examinons d'une manière générale les relations qui existent entre l'équation donnée:

$$X = x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots Kx^2 + Lx + M = y$$

et toutes les dérivées de cette équation, ou plûtôt entre toutes les courbes que ces équations représentent.

Ces équations dérivées sont:

$$X' = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + \ldots\ldots 2Kx + L = y',$$
$$X'' = m(m-1)x^{m-2} + (m-1)(m-2)Ax^{m-3} + \ldots\ldots 2K = y'',$$

etc. etc. jusqu'à la dernière qui est

$$X^m = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-(m-2))(m-(m-1)) = y^m$$
$$= \text{Constante.}$$

(La quantité m dont X^m et y^m sont affectées, n'est que l'indice du rang de la dérivée et non une puissance.) Il est bien évident que la dernière dérivée X^m, étant indépendante de la variable x, sera toujours positive, quel que soit la valeur de x, depuis $x = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $x = +\frac{1}{0}$. — Mais, il n'en est pas de même des autres dérivées

$$X^{(m-1)}, \ldots\ldots X^{IV}, X''', X'', X' \text{ et de l'équation primitive } X,$$

qui peuvent être tantôt positives, tantôt négatives, selon la valeur attribuée à x.

Si l'on fait dans les fonctions ci-dessus $x = -\frac{1}{0}$, il est évident que toutes celles où la puissance la plus élevée de x sera un nombre *pair*, prendront le signe $+$, tandis que toutes les autres prendront le signe $-$. Si l'on fait au contraire $x = +\frac{1}{0}$, toutes les fonctions auront le signe $+$, quel que soit le degré de la fonction. — Ainsi en écrivant toutes ces fonctions en commençant par la dernière qui est indépendante de x, et dont le signe est toujours positif, nous aurons, en marquant au dessous de chaque fonction le

signe qu'elle prendra, les deux suites:

$$X^m, X^{m-1}, \ldots\ldots X^{IV}, X''', X'', X' \text{ et } X$$

$$(1.)\quad \begin{cases} + \; - \; \ldots\ldots + \; - \; + \; - \; + \text{ pour } x = -\frac{1}{0} \text{ si le degré de } X \text{ est } \textit{pair}, \\ + \; - \; \ldots\ldots - \; + \; - \; + \; - \text{ pour } x = -\frac{1}{0} \text{ si le degré de } X \text{ est } \textit{impair}, \end{cases}$$

et

$$(2.)\quad + \; + \; \ldots\ldots + \; + \; + \; + \; + \text{ pour } x = +\frac{1}{0} \text{ quel que soit le degré de } x.$$

Nous appellerons ***variation***, ou changement de signe, la succession dans cette suite de deux signes différents, et ***permanence***, la succession de deux signes semblables: — on voit que la suite supérieure n'a que des ***variations***, tandis que la suite inférieure n'a que des ***permanences*** de signe, il suit donc de là, que dans le passage de la variable x, de la valeur $-\frac{1}{0}$ à la valeur $+\frac{1}{0}$, la suite des fonctions X, X', etc. perd autant de variations de signes, que l'équation du degré m a de racines.

Nous allons prouver de plus, que la suite des fonctions ci-dessus ne perd pas toutes ses variations de signes à la fois, mais qu'elle n'en perd qu'une seule, chaque fois, que la variable x, en croissant continuellement depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$, vient à atteindre et à dépasser une des racines de la proposée.

Pour cela, supposons que l'on construise les courbes correspondantes à l'équation donnée et a toutes ses dérivées, en représentant leurs ordonnées par y, y', y'', etc. nous aurons:

$$X = y, \quad X' = y', \quad X'' = y'', \quad \ldots\ldots \quad X^m = y^m.$$

Supposons aussi, qu'au lieu de construire ces courbes sur le même axe, on les rapporte comme dans la (fig. 4), à des axes parallèles entre eux, $(-X, +X)$ pour la courbe correspondante à l'équation primitive $X = y$; $(-X', +X')$ pour la courbe correspondante à la première dérivée $X' = y'$, et ainsi de suite, en conservant d'ailleurs le même axe des ordonnées $(+Y, -Y)$ pour toutes ces courbes; — cela posé, examinons les variations de signes que subiront les ordonnées y, y', y'', etc. de ces diverses courbes, lorsqu'on fera varier l'abscisse commune x.

En examinant les courbes de la (fig. 4), on voit que les points d'intersection de l'axe avec l'une des courbes intermédiaires, correspondent aux

points de maximum ou de minimum de la courbe précédente ou immédiatement supérieure, et que les points de maximum et de minimum de cette courbe correspondent aux points d'inflexion de la précédente, et aux points d'intersection de la suivante avec l'axe, et ainsi de suite. — De là d'abord une première conséquence: c'est que la première racine Op de la première courbe, du côté des x négatifs, dépasse nécessairement de ce même côté la première racine de la seconde courbe, et parconséquent les premières racines de toutes les courbes suivantes ou dérivées; — et de même, la dernière racine Op^{IV} de la première courbe, du côté des x positifs, dépasse du même côté toutes les dernières racines des courbes dérivées. — Il est donc évident que si par un point α, dont l'abscisse $O\alpha$ dépasse du côté négatif la première racine Op de la première courbe, on mène une perpendiculaire à l'axe des x, cette perpendiculaire prolongée indéfiniment ne coupera que la branche gauche de chaque courbe, à commencer par la première, quel que soit le degré de l'équation, et comme les courbes sont alternativement de degrés pairs et impairs, il s'ensuit que les ordonnées des courbes successives, pour le point α, seront alternativement: *négatives et positives*, si comme dans la (figure 4), la première courbe est de degré *impair*, et au contraire *positives et négatives*, si la première courbe est de degré *pair*. — De même si l'on prend pour abscisse du côté des x positifs une quantité $O\beta$, qui dépasse la dernière racine de la première équation, on voit que les ordonnées de toutes les courbes correspondantes au point β, seront toutes positives, puisque la perpendiculaire indéfinie menée par ce point ne peut couper que les branches droites de toutes les courbes, qui sont toutes ascendantes.

Comme les points α et β peuvent être aussi près qu'on voudra des points p et p^{IV} qui déterminent les deux racines extrêmes de l'équation, il s'ensuit que ces deux racines Op et Op^{IV}, sont deux limites telles: que toute valeur de x prise en deça de la première, donnera pour X et ses dérivées autant de variations de signes, que l'équation donnée $X=0$ a de racines, et, que toute valeur de x qui surpassera la seconde limite, ne donnera pour X et ses dérivées que des permanences de signe; — parconséquent, on voit que la plus grande et la plus petite racine d'une équation, ou ce qui revient au même: que la plus grande racine positive et la plus grande racine négative, sont deux limites, entre lesquelles les valeurs de la variable x doivent être comprises pour faire varier la suite des signes de la fonction X et de toutes ses dérivées; — en d'autres termes, toute valeur de x qui ne serait pas

comprise entre ces limites étant mise dans la fonction X et ses dérivées, ne peut donner que deux suites de signes, savoir: l'une qui n'aura que des variations de signe, si x est moindre que la plus petite limite, et l'autre, que des permanences de signe, si x surpasse la plus grande limite.

Nous avons vu que la première racine Op de l'équation $X=0$, ou ce qui est la même chose, que l'abscisse Op du premier point d'intersection de la première courbe $X=y$ avec l'axe des x, dépassait du côté gauche toutes les premières racines des équations dérivées $X'=0$, $X''=0$, etc. ou tous les premiers points d'intersection des courbes dérivées avec leurs axes respectifs, et que pour tout point α situé en deça du points p on a la suite de signes:

$$X^m,\ X^{m-1},\ \ldots\ldots\ X^{IV},\ X''',\ X'',\ X',\ X$$
$$+\quad -\quad \ldots\ldots -\quad +\quad -\quad +\quad -\ldots\ldots \text{ pour le point } \alpha$$

dont le dernier à droite, c'est à dire celui qui correspond à la première courbe est négatif, puisque la première courbe dans la figure (4) représente une équation de degré impair. — Mais on voit que si le point α en s'avançant de gauche à droite venait à atteindre le point p, on aurait en ce point $X=y=0$, puisque l'abscisse Op est la première racine de l'équation donnée, et que si le point continuait à s'avancer jusqu'en α' dont l'abscisse est moindre que Op, la fonction X changerait de signe, puisque l'ordonnée de la première courbe au point α' est positive; — ainsi la suite des signes ci-dessus se changerait en:

$$X^m,\ X^{m-1},\ \ldots\ldots\ X^{IV},\ X''',\ X'',\ X',\ X$$
$$+\quad -\quad \ldots\ldots -\quad +\quad -\quad +\quad + \text{ pour le point } \alpha'.$$

Et comme le point α' peut être aussi près qu'on voudra du point p, il s'en suit que la suite des signes, qui avait autant de variations que l'équation donnée a de racines, a perdu une variation et gagné une permanence de signe, aussitôt que la variable a dépassé la première racine.

Il est bien évident que, tant que le point α' en continuant de s'avancer vers la droite n'aura pas dépassé la première racine q de la seconde courbe, il n'y aura aucun changement dans la suite des signes que nous venons de trouver pour le point α'; mais pour savoir ce que devient cette suite quand le point α' aura dépassé la racine q et sera en α'', considérons séparément les deux suites de signes pour ces deux points, et relativement à l'équation $X'=0$ ou à la première dérivée seulement, nous aurons:

X^m, X^{m-1}, ... X^{IV}, X''', X'', X'

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad - \quad +$ pour le point α',

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad - \quad -$ pour le point α'',

puisque la variable x, en passant de α' à α'', a dépassé la première racine de $X' = 0$; — or en ajoutant à ces deux suites, du côté droit, le signe de l'ordonnée de la première courbe pour chacun de ces points, qui est $+$, on aura:

X^m, X^{m-1}, ... X^{IV}, X''', X'', X', X

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad - \quad + \quad +$ pour le point α',

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad - \quad - \quad +$ pour le point α''.

Ce qui fait voir que même après avoir dépassé la première racine de la seconde courbe, le nombre des variations et celui des permanences de signe n'a pas changé, seulement la permanence a changé de place dans la suite des signes, puisque la permanence de la suite supérieure $++$, s'est changée en une variation $-+$, et que la variation $-+$ s'est changée en une permanence $--$.

Enfin, en considérant la première racine de la troisième courbe, ou de la seconde dérivée $X'' = 0$, on voit qu'en faisant passer la variable x d'un côté à l'autre du point r, ou de α'' en α''', on aura en considérant seulement les suites des signes à partir de la troisième courbe,

X^m, X^{m-1}, ... X^{IV}, X''', X''

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad -$ pour le point α'',

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad +$ pour le point α'''.

Mais en ajoutant à droite de ces deux suites les signes des ordonnées y' et y, pour ces deux points, qui sont tout deux $-$ pour y' et tout deux $+$ pour y, on aura:

X^m, X^{m-1}, ... X^{IV}, X''', X'', X', X

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad - \quad - \quad +$ pour α'',

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad + \quad - \quad +$ pour α''',

d'où l'on voit, que même en dépassant la première racine de la troisième courbe, le nombre des variations et des permanences dans la suite des signes n'a pas changé, seulement la permanence $--$ qui était au second rang, à passé au troisième où l'on trouve une permanence $++$ dans la suite qui correspond au point α'''.

Or, le point α''' peut être pris aussi près qu'on voudra du point p', qui indique la seconde racine de l'équation de la première courbe, ainsi, en résumant cette analyse on voit que:

1°. La suite des signes des fonctions X, X', etc. perd une variation et gagne une permanence de signe, dès que la valeur attribuée à x a dépassé la première racine de l'équation, et que:

2°. Le nombre total des variations, et le nombre total des permanences restent les mêmes, tant que x ne sort pas de l'intervalle pp' de la première racine à la seconde.

Cela prouvé, il est évident qu'aussitôt que la variable x aura dépassé la seconde racine Op' de la première équation, ou que le point α''' se sera avancé jusqu'en α^{IV}, l'ordonnée y, deviendra de nouveau négative, et les suites des signes correspondantes à ces deux points seront:

X^m, X^{m-1}, ... X^{IV}, X''', X'', X', X

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad + \quad - \quad +$ pour le point α''',

$+ \quad - \quad \ldots\ldots - \quad + \quad + \quad - \quad -$ pour le point α^{IV}.

Ce qui fait voir, qu'en dépassant de gauche à droite la second racine de l'équation donnée, la variable x fait perdre une seconde variation de signes à la suite des fonctions X, X', X'', etc. et fait gagner à cette suite une seconde permanence.

En continuant cette analyse des signes que doivent prendre les fonctions, ou les ordonnées des courbes, entre la seconde et la troisième racine, puis entre la troisième et la quatrième, et ainsi de suite, on s'assurerait aisément que dans l'intervalle de deux racines de la première équation, la suite des signes conserve invariablement le même nombre de variations et le même nombre de permanences de signes, et qu'au contraire la suite perd une variation et gagne une permanence chaque fois que la variable passe d'un intervalle à un autre de gauche à droite, c'est à dire qu'elle dépasse dans ce sens l'une des racines de la proposée.

Il est aisé de voir, que si la première courbe eut été d'un degré *pair*, l'analyse des signes eut été entièrement semblable à celle que nous venons de faire, seulement le signe du polynôme X qui était négatif dans la première suite, eut été positif; — on voit aussi qu'au lieu de commencer cette analyse des signes en faisant varier x de gauche à droite, on aurait pu faire varier x de droite à gauche en commençant par le point b, (fig. 4) qui dépasse

toutes les racines du côté droit, et pour lequel la suite des signes n'a aucune variation, mais qui en gagne une aucontraire chaque fois que x, en décroissant vient à dépasser une des racines de droite à gauche, comme on peut le voir pour le point β' situé entre la dernière et l'avant dernière des racines de l'équation proposée.

Cette propriété des racines, de faire perdre une variation de signes à la suite des fonctions X, X', X'', etc. chaque fois que x vient à dépasser une de ces racines, a été prise par ***Fourrier*** pour bâse de la méthode qu'il a crée pour la recherche des racines des équations de tous les degrés. — Quoique je me propose d'établir une méthode différente, je n'en ai pas moins crû devoir exposer la démonstration du théorème de ***Fourrier***, tant pour la démonstration, que je crois nouvelle, que pour le théorème en lui-même, qui est un remarquable phénomène mathématique.

VII.

Fig. 5. Soit: $mI^{v}I'II''I'''I^{iv}m'$, une portion de la courbe qui représente une équation d'un degré quelconque, portion qui est comprise entre un point de minimum m et un point de maximum m', et supposons qu'il s'agisse de déterminer la racine Op qui correspond à cette partie de la courbe.

On voit du premier coup d'oeil, que: soit que l'axe des x passe au dessus du point d'inflexion I, soit qu'il passe au dessous comme dans la (fig. 5), le point satisfait à la condition nécessaire à la convergence de la formule (7.), si on le prend pour point de départ de l'approximation, puisqu'entre ce point, et le point p qui détermine la racine cherchée, la courbe ne présente aucun point singulier; — de plus, tous les points situés comme I' entre la racine p et le point d'inflexion I, étant encore plus proches de la racine, seront encore plus favorables à l'approximation de cette dernière, que le point I lui même. — Quant aux points situés au delà du point d'inflexion, par rapport à la racine, tels que le sont les points I'' et I''', si la touchante à la courbe en ces points, tombe entre la racine et la touchante au point d'inflexion, comme cela arrive pour le point I'', ou même si cette touchante ne dépasse la racine que d'une faible quantité, comme celle du point I''', et de manière à ramener l'approximation dans l'espace pn: tous ces points peuvent être pris pour point de départ de l'approximation, et en prenant l'abscisse de l'un de ces points pour la quantité arbitraire α de la formule (7.) on arrivera infailliblement à la racine cherchée Op.

Pour d'autres points tels que I^{IV} ou I^{V}, situés plus près des points m et m', la touchante à la courbe en ces points, ferait sortir l'approximation de la portion de courbe examinée, et il arriverait que le résultat au lieu de se rapprocher de la racine cherchée Op, s'en éloignerait, et s'approcherait d'une autre racine, située sur une autre portion de la courbe.

On voit donc, que non seulement le point d'inflexion I, mais encore tous les points pris sur une certaine étendue de la courbe de part et d'autre de ce point, peuvent servir de point de départ pour conduire à la racine cherchée Op, et que parconséquent toute valeur seulement approchée de l'abscisse On du point d'inflexion, conduira nécessairement à la racine correspondante.

Il suit de là une première conséquence: c'est, qu'une courbe correspondante à une équation du degré m, ayant $(m-1)$ points de maximum et de minimum, et parconséquent $(m-2)$ points d'inflexion, il faut commencer par déterminer les abscisses de ces $m-2$ points d'inflexion, et prendre les valeurs approchées de chacune d'elles pour bâse de l'approximation des $(m-2)$ racines correspondantes de l'équation donnée. — Quand on sera parvenu par ce moyen à déterminer $(m-2)$ racines de la proposée, on trouvera facilement les deux racines restantes ou extrêmes de l'équation donnée, au moyen d'une équation du 2^{d} degré dont on formera les coefficients, d'une part en retranchant du coefficient du 2^{d} terme de la proposée la somme des $m-2$ racines déjà trouvées, et d'autre part en divisant le dernier terme par le produit de ces mêmes racines. (Il est clair que la formation d'une équation du 2^{d} degré pour déterminer les deux dernières racines, n'est praticable que dans le cas où toutes les racines de la proposée sont réelles, ce dont j'ai d'ailleurs expressément averti. — Nous verrons plus tard comment le procédé se modifie quand les racines deviennent imaginaires ou manquantes.)

De cette manière la question se trouve ramenée à trouver les abscisses des $(m-2)$ points d'inflexion de la courbe qui représente l'équation donnée; — mais, nous avons vu, que les points d'inflexion de la courbe primitive, correspondent aux points de maximum et de minimum de la courbe qui représente la première dérivée, et parconséquent aux racines de la 2de dérivée; — ainsi, la recherche des racines de l'équation du degré m, se trouve ramenée à la recherche des racines de la seconde dérivée qui n'est plus que du degré $(x-2)$, et qui se trouvera, par des considérations semblables ramenée à la recherche des racines d'une équation d'un degré $(m-4)$, puis à celles d'une équation

d'un degré $m-6$, et jusqu'à ce qu'enfin l'on arrive à une équation du 2^{d} ou du 1er degré, selon que la plus haute puissance de x dans la proposée est pair ou impair.

Pour donner un exemple de la méthode proposée, cherchons les racines de l'équation:

$$X = x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$$

qui sont toutes trois réelles, et égales aux nombres: -5, $+3$, $+7$.

Les dérivées de cette équation seront:

$$X' = +3x^2 - 10x - 29,$$
$$X'' = +6x - 10,$$
$$X''' = +6.$$

Traçons sur un tableau séparé, fig. 6, trois lignes horizontales et parallèles entr'elles, $(-X, +X)$, $(-X', +X')$ et $(-X'', +X'')$ que nous prendrons pour axes des x respectifs des trois lieux géométriques, de l'équation donnée et de ses deux premières dérivées X' et X'', et traçons aussi une ligne $(+Y, -Y)$ perpendiculaire à ces trois axes, et que nous prendrons pour axe commun des y.

En posant d'abord:

$$X'' = +6x - 10 = 0.$$

Nous trouvons

$$(\alpha.) \qquad x = +1{,}666\ldots$$

pour la valeur de la racine de la seconde dérivée, qui sera en même temps l'abscisse du point minimum de la courbe correspondante à la première dérivée et parconséquent celle du point d'inflexion de la courbe qui correspond à l'équation donnée. Portons donc sur l'axe $(-X'', +X'')$ à partir de l'origine O'' et du côté positif une ligne $O''n'' = +1{,}666\ldots$ nous aurons cette abscisse commune; — de plus par le point n'' élevons la perpendiculaire indéfinie $n''k$, nous aurons: $On = O'n' = O''n''$.

Substituons la valeur trouvée pour x dans la première dérivée X' et dans l'équation donnée X, nous trouvons:

$$X'_{(+1{,}666\ldots)} = -42{,}2444,\ldots$$
$$X_{(+1{,}666\ldots)} = +48{,}990276\ldots$$

La première de ces valeurs prouve que l'ordonnée du point minimum de la première dérivée est égale à $-42{,}2444\ldots$; — construisons ce point en

portant sur la perpendiculaire $n''k$, a partir de l'axe $(-X', +X')$ et du côté des y négatifs, la ligne $n'm = -42{,}244\ldots$

La seconde des valeurs ci-dessus prouve que le point d'inflexion de la courbe qui correspond à l'équation donnée a pour ordonnée $+48{,}990276\ldots$; construisons aussi ce point en prenant $nI = +48{,}990276\ldots$

Présentement cherchons les racines de la première dérivée qui étant du second degré se resoud par le procédé ordinaire, en posant:

$$X' = 3x^2 - 10x - 29 = 0,$$

nous trouvons pour ces racines: $-1{,}861\ldots$ et $+5{,}861\ldots$ construisons ces points en portant sur l'axe $(-X', +X')$ les abscisses:

$$O'p = -1{,}861\ldots \quad \text{et} \quad O'p' = +5{,}861\ldots$$

et menons par les points p et p' les perpendiculaires pk' et $p'k''$, qui couperont l'axe des $(-X, +X)$ aux points q et q'; — ces deux abscisses $O'p$ et $O'p'$, sont aussi celles des points maximum et minimum de la courbe correspondante à l'équation donnée $X = 0$, et en mettant les valeurs de ces abscisses dans le polynome X, on aura:

$$X_{(-1{,}861)} = +135{,}168\ldots, \qquad X_{(5{,}861)} = -36{,}288\ldots$$

La première de ces deux valeurs, prouve que l'ordonnée du point de maximum, qui correspond à l'abscisse Oq, est positive et égale à $+135{,}168\ldots$ et nous la construisons en prenant qm' égal à ce nombre; — la seconde valeur prouve que la courbe a un point de minimum, correspondant à l'abscisse Oq', dont l'ordonnée est négative, et que nous construirons en prenant $q'm'' = -36{,}288\ldots$

Il suit de ceci, que la courbe qui est le lieu géométrique de l'équation donnée, coupe nécessairement l'axe des x en trois points, et que parconséquent toutes les 3 racines de l'équation sont réelles et inégales. — En effet, la courbe étant de degré impair, aura du côté négatif une branche descendante, indéfinie, et qui partira du point de maximum m' situé au dessus de l'axe, que cette branche doit parconséquent couper; — de même, la courbe ayant du côté des x positifs une branche ascendante indéfinie, et qui part du point de minimum m' situé au dessous de l'axe, il est évident que cette branche ascendante doit aussi nécessairement couper l'axe; — enfin la portion de courbe qui s'étend du point m' au point m'', doit aussi nécessairement couper l'axe puisque ces deux points sont situés des deux côtés opposés de cet axe.

Après nous être assuré que les trois racines de l'équation sont réelles, il ne nous reste plus qu'à appliquer la valeur (α.) à la recherche de la racine qui correspond au point d'inflexion.

En mettant donc la valeur (α.) qui est $+1{,}666\ldots$ au lieu de x dans les polynômes X et X', nous aurons pour première approximation:

$$x = +1{,}666\ldots. - \left\{\frac{X_{(+1{,}666)}}{X'_{(+1{,}666\ldots)}}\right\} = +1{,}666 - \left\{\frac{+48{,}990276\ldots}{-42{,}244444\ldots.}\right\} = +2{,}826334\ldots$$

En prenant cette première approximation, avec deux chiffres décimaux pour bâse d'une seconde approximation, nous aurons:

$$x = +2{,}826334\ldots. - \left\{\frac{X_{(+2{,}82)}}{X'_{(+2{,}82)}}\right\} = +2{,}29976556\ldots.$$

En prenant cette nouvelle valeur avec trois chiffres décimaux pour bâse d'une troisième approximation, nous aurons:

$$x = +2{,}9976556\ldots. - \left\{\frac{X_{(+2{,}997)}}{X'_{(+2{,}997)}}\right\} = +2{,}999999\ldots.$$

nombre qui ne diffère de $+3$ que de la millionième partie de l'unité.

D'après la situation du point d'inflexion et de la courbe, quelque loin que l'on pousse l'approximation, le résultat sera toujours moindre que la racine cherchée, d'où il suit, qu'en augmentant de l'unité le dernier chiffre trouvé de la partie décimale de la racine, il doit arriver de deux choses l'une: 1° ou l'on tombera sur la vraie valeur de la racine, ou: 2° l'on dépassera cette valeur. — Dans le premier cas, en substituant la valeur ainsi augmentée, au lieu de x, dans l'équation donnée, cette équation sera satisfaite et le résultat égale à zéro. — Dans le second cas, l'équation ne sera pas satisfaite, mais le résultat sera de signe contraire à celui que donne l'approximation trouvée, ce qui prouve que la racine est dépassée par l'augmentation d'une unité décimale qu'on a ajoutée au dernier chiffre.

Ajoutant donc une unité au dernier chiffre décimal de l'approximation trouvée, on obtient $x = +3$, valeur qui tombe dans le premier cas et qui satisfait à l'équation.

Pour trouver les deux racines restantes, retranchons le nombre trouvé $+3$, du coefficient du second terme de l'équation donnée, pris avec un signe contraire, et qui est ici $+5$, nous aurons $+5-3=+2$ pour la somme des deux racines restantes; — divisant ensuite par $+3$ le dernier terme de l'équation donnée, pris avec un signe contraire, qui sera ici -105, on trouve -35 pour le produit des deux racines restante, qui seront parconséquent

données par l'équation:

$$x'^2 - 2x' - 35 = 0,$$

d'où l'on tire:

$$x' = +1 \pm \sqrt{36}$$

qui donne -5 et $+7$ pour les deux racines cherchées.

Il faut observer que chaque fois que la racine cherchée sera un nombre entier, ou au moins une quantité exprimable exactement par un nombre fini de chiffres décimaux, il arrivera: 1°. Que si l'approximation est au dessous de la racine cherchée, on obtiendra tous les chiffres exacts de la valeur de cette racine, moins le dernier, qui sera d'une unité moindre, mais suivi d'un nombre de 9, d'autant plus grand qu'on aura poussé l'approximation plus loin. — 2°. Si au contraire l'approximation donne des valeurs plus grandes que la racine, on retrouvera tous les chiffres de cette racine, et ce nombre sera séparé du reste des chiffres significatifs de la décimale par un nombre d'autant plus grand de zéros qu'on se sera plus approchée de la racine. — Dans le premier cas on ajoute une unité au dernier neuf de la fraction décimale, et dans le second cas on rejette les derniers chiffres séparés par les zéros, et l'on examine si le résultat satisfait exactement à l'équation.

Il faut encore observer qu'en faisant cette analyse pour ainsi dire géométrique de l'équation et de ses dérivées, il n'y a nulle nécessité en déterminant les points singuliers de chaque courbe, que les abscisses et les ordonnées soyent indiquées avec une grande précision; — il suffit de les tracer à la main, en conservant aux points extrêmes des abscisses leur relation de position respective. — Il en est de même pour les ordonnées, qui sont en général extrêmement grandes par rapport aux abscisses; il suffit d'indiquer si ces ordonnées sont positives ou négatives, et dans le cas de deux ou plusieurs ordonnées de même signe, la figure doit indiquer laquelle de deux ordonnées consécutives est plus grande, ou plus petite, afin que la courbe qu'on ferait passer par leurs extrêmités, présente les mêmes phénomènes de courbure, que ceux qui caractériseraient la courbe, en la supposant construite d'après les proportions de l'échelle.

Soit en effet:

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots Lx + M = y$$

et

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots Lx + M = ny'$$

les équations de deux courbes; — il est de toute évidence que ces deux

courbes coupent l'axe des x aux mêmes points, et que les abscisses des points d'inflexion, de maximum et de minimum, sont les mêmes pour les deux courbes, et cependant les ordonnées correspondantes aux deux courbes, pour une même abscisse, sont dans le rapport de n à 1.

Cette méthode, de tracer les courbes correspondantes à l'équation et à ses dérivées en commençant par ces dernières, a l'avantage de faciliter les opérations en indiquant les phénomènes de courbure de chaque ligne, et surtout, si l'on a soin d'inscrire sur le tableau, les valeurs des abscisses, celles des ordonnées de points singuliers, et les racines des courbes, à mésure qu'on les détermine.

Les racines des équations dérivées ne servant que comme quantités auxiliaires, il est inutile dans le plus grand nombre de cas de pousser loin leur approximation, et l'on peut en général se contenter d'un ou deux chiffres décimaux exacts; quant aux racines de l'équation primitive, ou donnée, on poussera l'approximation aussi loin qu'on voudra, ou aussi loin que pourra l'exiger la nature du problême.

VIII.

Dans tout ce que nous avons vu jusqu'à présent, nous avons supposé, à dessein, que toutes les racines de l'équation proposée étaient ***réelles*** et ***inégales,*** et cette supposition constitue le cas le plus général. — Il nous reste donc pour compléter notre méthode, à examiner le cas particulier des racines *égales,* et celui des racines ***imaginaires*** ou ***manquantes.***

Pour cela, analysons d'abord les variations qui peuvent être produites dans le lieu géométrique d'une équation, soit relativement à sa position par rapport aux axes des coordonnées, soit relativement aux phénomènes de courbure qui le caractérisent, sans changer le degré de l'équation.

Soit, pour fixer les idées, le lieu géométrique d'une équation du 5me degré, dont toutes les racines sont réelles et inégales, comme on le voit dans la (fig. 7) et dont $(+X, -X)$ est l'axe des abscisses, et $(+Y, -Y)$ celui des ordonnées.

Il est évident qu'en quelque lieu que l'on transporte les axes des coordonnées, la courbe ne changera pas, mais les constantes de l'équation varieront, et parconséquent ses racines varieront aussi.

Supposons d'abord qu'on transporte l'origine des ***abscisses O*** en un point quelconque ***P*** pris sur l'axe des abscisses, comme on le voit dans la

(fig. 7); — il est clair que les racines de l'équation qui étaient Or, Os, Ot, Ou et Ov, sont devenus Pr, Ps, Pt, Pu et Pv, et ne diffèrent des premières que de la quantité OP dont on a transporté l'axe des ordonnées, ou l'origine des abscisses. — On voit que ce genre de transformation fait varier à la fois toutes les constantes de l'équation, mais ne change en rien la nature des racines dont les différences respectives restent invariable, mais qui ne peuvent devenir par là ni égales ni imaginaires. — On voit aussi que par une transformation de ce genre on peut rendre toutes les racines de l'équation, soit positives, soit négatives, si l'on avait besoin d'une telle transformation.

Supposons ensuite que ce soit l'origine des *ordonnées*, ou l'axe des abscisses, que l'on transporte parallèlement à lui même, successivement de O en O', O'', O''', O^{IV}, etc. — On voit d'abord que tant que le nouvel axe des abscisses $(-X', +X')$ n'aura pas dépassé au moins l'un des points de maximum m et m'', cet axe ne cessera pas de couper la courbe en cinq points, comme dans sa position primitive, et que l'équation ne cessera pas d'avoir cinq racines réelles et inégales, avec cette différence pourtant, que plus l'axe s'approche des points de maximum m et m'', et plus les deux racines les plus voisines de ces points tendront à se rapprocher. — Quand le nouvel axe viendra à se confondre avec la tangente $T''T''$ du point maximum le moins élevé m'', comme on le voit dans la figure en $(-X'', +X'')$ les deux racines les plus voisines de ce point, et qui étaient d'abord Ot et Ou, puis qui étaient devenues $O't'$ et $O'u'$, sont enfin devenues égales entr'elles et à $O''m''$, et les deux points d'intersection de la sinuosité $tm''u$ avec l'axe des x, se sont réunis au point de maximum m'', pour former un point de contact avec le nouvel axe des x.

Si l'axe des x continuait à s'élever jusqu'aux points O''', O^{IV}, comme on le voit dans la figure, il dépasserait d'abord le point m'', et il n'y aurait plus de point de contact, parconséquent les deux racines qui s'étaient réunies au point m'' en devenant égales, viendraient à manquer, ou seraient imaginaires.

Dans la position de l'axe indiquée dans la figure: en $(-X''', +X''')$ le nouvel axe touche la courbe au point m, et l'équation de la courbe correspondante à ce nouvel axe, aurait deux racines égales $O'''m$, deux racines imaginaires manquantes au dessus du point m'' dépassé par l'axe, et enfin une troisième racine réelle $O'''v'''$. — Dans la position de l'axe indiquée dans la figure en $(-X^{IV}, +X^{IV})$, les points de maximum m et m'' sont tout deux

dépassés par cet axe, et la courbe aura évidemment quatre racines imaginaires, et une seule racine réelle $O^{IV}v^{IV}$.

Il est évident, que si l'axe des x aulieu de s'élever au dessus de sa position primitive, s'abaissait au dessous parallèlement à lui même, les mêmes phénomènes se produiraient, et enfin quand l'axe aurait dépassé les deux points de minimum m' et m''', comme on le voit en $(-X^{V}, +X^{V})$, il n'y aurait plus qu'une racine réelle $O^{V}r^{V}$, et quatre racines imaginaires.

Il faut remarquer, que tous ces changements s'obtiennent en faisant seulement varier le dernier terme de l'équation, c'est à dire celui qui est indépendant de x, et que parconséquent cette variation n'affecte en rien les coefficients des puissances de l'inconnue.

Dans les deux cas que nous venons d'examiner, nous avons successivement changé la position des axes relativement au lieu géométrique de l'équation, supposé fixe, ce qui est la même chose que si nous avions transporté la courbe, en supposant fixes les axes, et tous les changements obtenus dans les racines de l'équation, n'affectent en aucune manière la forme même de son lieu géométrique. — Mais, puisque l'on peut attribuer à chacun des coefficients de l'équation une infinité de valeurs différentes depuis $-\frac{1}{0}$ jusqu'à $+\frac{1}{0}$, on pourra, sans changer le degré de l'équation ni la position des axes, faire varier la courbe même d'une infinité de manières, sans que cette courbe change de nature, ou cesse de présenter les phénomènes généraux de courbure, qui doivent y caractériser le degré de l'équation.

Soit par exemple (fig. 8) la courbe $Drmm'A$, qui représente le lieu géométrique d'une équation du 3me degré, dont une seule racine est réelle; — si l'on fait varier les coefficients de cette équation, on fera varier la distance entre le point de maximum m, et le point de minimum m', et parconséquent la longueur de la portion de courbe qui sépare ces deux points; — mais il est évident que parmi toutes les suppositions que l'on peut faire, il doit nécessairement s'en trouver de telles, que cette portion de courbe devienne zéro, ou, en d'autres termes, que le point de maximum m et le point de minimum m', viennent à se confondre en un seul et même point d'inflexion, comme l'indique la courbe ponctuée: $D'r'm''A'$, dont la tangente $T''T''$ au point d'inflexion, est parallèle à l'axe des x.

D'autres valeurs des coefficients de l'équation, pourraient réduire à zéro une portion de courbe $nmm'n'$, plus grande que mm', et la courbe prendrait alors la figure indiquée par la ligne ponctuée $D''r''m'''A''$, et les deux

points n et n' se réuniraient en un seul point d'inflexion m''', dont la tangente $T'''T'''$ est inclinée à l'axe des x. Dans l'un et l'autre cas, ce point d'inflexion indique deux racines imaginaires s'il est situé hors de l'axe des x, comme dans la (fig. 8). — Au contraire si ce point d'inflexion est sur l'axe même des x, alors, il correspond à trois racines égales dans le cas où l'axe est tangent à la courbe, et à une racine réelle et deux racines imaginaires, si la tangente en ce point est inclinée sur l'axe des x.

En effet, l'équation du 3me degré qui aurait toutes ses racines égales à $+a$ par exemple, pourrait être mise sous la forme

$$(x-a)^3 = 0,$$

et l'on voit que cette équation et ses deux premières dérivées deviennent zéro quand on y fait $x = +a$, ce qui prouve que la courbe a sur l'axe des x un point d'inflexion dont l'abscisse est $+a$, et qui a cet axe même pour tangente.

L'équation du 3me degré qui peut se mettre sous la forme:

$$(x-a)((x-a)^2+b^2) = 0,$$

ou bien:

$$(x-a)^3+(x-a)b^2 = 0,$$

n'a qu'une racine réelle a, qui satisfait à cette équation et à sa seconde dérivée, mais cette valeur réduit à $+b^2$ la première dérivée, ce qui prouve que le point d'inflexion a pour tangente une droite inclinée à l'axe de x, et qui fait avec cet axe un angle, dont la tangente trigonométrique est $+b^2$.

Cet exemple suffit pour faire comprendre le genre de variations que peuvent éprouver les lieux géométriques des équations; — ainsi par exemple il peut arriver que deux points de maximum et le point de minimum intermédiaire, ou deux points de minimum et un de maximum, se réunissent en un seul point, et dans un tel cas le point qui en résulte pourra correspondre: soit à quatre racines égales, soit à deux racines égales et à deux racines imaginaires, si l'axe touche la courbe en ce point; — soit à deux, ou à quatre racines imaginaires, si le point n'est pas sur l'axe des x.

Les points singuliers d'un lieu géométrique, formés par la réunion de deux ou de plusieurs points singuliers en un seul, peuvent être désignés sous le nom de points singuliers composés, pour les distinguer des points singuliers que la courbe présente dans le cas général, et que nous nommerons points singuliers simples ou ordinaires.

Nous dirons donc en résumé: qu'un point de maximum ou de minimum simple, correspond à deux racines égales chaque fois que l'axe de x touche la courbe en ce point, et, à deux racines imaginaires, quand la courbe tourne sa convexité vers l'axe des x sans le couper ni le toucher.

Qu'un point de maximum ou de minimum composé, quand la courbe touche l'axe en ce point, correspond à plusieurs couples de racines égales, ou, à un couple au moins de racines égales, et un, ou plusieurs couples de racines imaginaires. — Que quand un tel point tourne sa convexité vers l'axe sans le toucher, il correspond à autant de couples de racines imaginaires, qu'il réunit en lui de points de maximum ou de minimum simples, qui auraient leur convexité tournée dans le même sens; — enfin, que quand un tel point est situé hors de l'axe de x, et que la courbe en ce point tourne sa concavité vers cet axe: ce point correspond à autant de couples, moins un, de racines imaginaires, qu'il réunit en lui de points de maximum et de minimum simples, dont la convexité serait tournée dans le même sens.

Un point d'inflexion simple, ou ordinaire, ne correspond à une racine que quand ce point tombe par hazard sur l'axe des x; hors de cet axe, ce point ne correspond à aucune racine réelle ni imaginaire.

Un point d'inflexion composé, quand il est sur l'axe des x, correspond à un nombre toujours impair de racines égales et un ou plusieurs couples de racines imaginaires, si l'axe est tangent à la courbe en ce point, et à une seule racine réelle et un ou plusieurs couples de racines imaginaires, si la tangente est inclinée à l'axe des x. — Lorsque le point d'inflexion composé se trouve hors de l'axe des x, il correspond toujours à un ou plusieurs couples de racines imaginaires.

Il faut observer que les points d'inflexion composés, ont une position inverse de celle des points d'inflexion simples; — ainsi, que l'on mène par un point d'inflexion simple deux droites parallèles aux axes des coordonnées, on verra que les deux portions de courbe qu'il sépare auront leur concavité tournée vers la ligne qui est parallèle à l'axe des x, et leur convexité vers celle qui est parallèle à l'axe des y, tandis que le contraire aura lieu pour un point d'inflexion composé.

Soit

$$X = (x-a)^2\mathfrak{X} = 0$$

une équation qui a deux racines égales à $+a$; $-\mathfrak{X}$ étant un polynome indépendant du facteur $(x-a)$. — On aura en différentiant

$$X' = 2(x-a)\mathfrak{X} + (x-a)^2\mathfrak{X}',$$
$$X'' = 2\mathfrak{X} + 2(x-a)\mathfrak{X}' + (x-a)^2\mathfrak{X}'',$$
. . . . . .

$\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{X}''$ étant les dérivées du polynôme $\mathfrak{X}$.

En examinant ces trois équations, on voit, que $(x-a)$ est deux fois facteur de X, une fois seulement de X' et qu'enfin ce facteur ne divise plus X'', d'où il suit que la première dérivée aura une racine égale à $+a$, ou à la racine double de l'équation donnée.

Il résulte de cela, qu'en déterminant successivement les racines des équations dérivées, en commençant par celles qui sont du 1er et du second degré, et en substituant les valeurs trouvées pour une dérivée, dans l'équation d'un indice immédiatement supérieur pour déterminer les points de maximum et de minimum de cette équation, il arrivera que si l'une des racines a de l'une des dérivées de l'indice n, satisfait à la dérivée de l'indice immédiatement supérieur $(n-1)$, on doit en conclure que cette dernière équation a une racine double.

Mais, il se présente ici une difficulté, qu'il est indispensable de lever. — Voici en quoi elle consiste: — si l'on pouvait déterminer exactement dans chaque cas semblable la racine $+a$, il est évident, que dans le cas de deux racines égales, l'équation de l'indice $(n-1)$ serait aussi exactement satisfaite, et il ne saurait alors y avoir aucun doute; — mais, comme la quantité a peut être incommensurable, et que dans ce cas on ne peut jamais avoir sa valeur exacte, et ensuite, que même quand la racine a est une quantité finie il faut souvent pousser l'approximation très loin pour la découvrir, il doit nécessairement arriver qu'en se contentant d'une approximation de deux, trois, même de quatre chiffres décimaux exacts, la valeur de a ainsi déterminée et substituée dans l'équation de l'indice $(n-1)$, ne réduira pas cette équation exactement à zéro, mais donnera une valeur, positive ou négative extrêmement petite pour l'ordonnée du point de maximum ou de minimum correspondant à la racine cherchée; — parconséquent on ne peut pas être assuré directement dans ce cas, si en ce point l'équation a effectivement deux racines égales, ou deux racines imaginaires, ou enfin deux racines réelles mais très peu différentes entr'elles. — Il est donc nécessaire d'indiquer le moyen de s'en assurer exactement

Soit (fig. 9) une portion cmc' du lieu géométrique de l'équation quelconque $X=0$, qui correspond au point pour lequel la quantité $x=a$, racine

approchée de $X'=0$, donne une valeur très petite pour X. — Les trois cas que nous avons à éxaminer sont représentés par la (fig. 9) en A, B et C.

Soit $On=a$, la valeur approchée de la racine de X', moindre que cette racine, et qui, substituée dans le polynome X, donne une valeur extrêmement petite $+np$ pour l'ordonné. — Il est évident que si la courbe touche ou coupe l'axe des x, quelque loin que l'on pousse l'approximation, on ne pourra jamais être certain qu'il y ait, soit un point de contact, soit deux points d'intersection extrêmement voisins; — dans un tel cas, après avoir poussé l'approximation jusqu'à trois ou quatre chiffres décimaux exacts, on formera une seconde valeur approchée de la racine, en augmentant d'une unité le dernier chiffre décimal exact de la valeur trouvée, et cette nouvelle valeur approchée que nous nommerons b, si elle ne satisfait pas l'équation, sera évidemment plus grande que la racine, qui se trouvera parconséquent comprise entre a et b.

Dans le cas où la courbe coupe l'axe des x, comme on le voit dans la (fig. 9) en (A), il arrivera de deux choses l'une: 1°. Ou la valeur de b mise dans le polynome X donnera une ordonnée négative très petite, et alors on sera certain que la courbe coupe l'axe entre a et b et qu'elle a parconséquent deux racines réelles, inégales, quoique très voisines. — 2°. Ou la valeur de b mise dans l'équation donnera une ordonnée $n'p'$, très petite aussi, mais positive, comme on le voit en (A), (B) et (C).

Dans le premier cas, on pourra considérer la valeur approchée a, comme une valeur suffisamment approchée de l'une des racines, et l'on cherchera l'autre par le procédé ordinaire en partant de l'abscisse du point d'inflexion voisin; — dans le second cas, il faudra prendre a et b pour points de départ de nouvelles approximations, et, ayant chaque fois formé les valeurs des soustangentes ns et $n's'$, les ajouter ensemble abstraction faite du signe, pour voir si leur somme atteint ou dépasse la différence $b-a$ ou nn' des deux valeurs dont on est parti. — En effet, si les deux racines sont réelles, il suffit de voir les fig. (A) et (B) pour se convaincre que la somme des deux soustangentes ne peut jamais atteindre la différence $b-a$; — mais au contraire, si les deux racines sont imaginaires comme dans la fig. (C), la courbe ne coupera pas l'axe des x, et il est évident qu'il suffira d'un très petit nombre d'approximations pour que la somme des soustangentes dépasse $b-a$.

a et b étant les valeurs des deux abscisses, l'une a moindre que la racine, l'autre b plus grande, nous aurons:

$$\frac{\frac{X_{(a)}}{X'_{(a)}} + \frac{X_{(b)}}{X'_{(b)}}}{b-a}$$

pour le rapport de la somme des soustangentes à la différence des limites a et b dont on était parti, et, en continuant l'approximation, on aura:

$$\frac{\frac{X_{(a')}}{X'_{(a')}} + \frac{X_{(b')}}{X'_{(b')}}}{b'-a'}$$

pour le même rapport après une nouvelle approximation, et ainsi de suite. — Mais il est évident: que si les racines sont imaginaires, ce rapport ira promptement en croissant, et dépassera bientôt l'unité; — que si les deux racines sont réelles et inégales, ce rapport au lieu de croître diminuera rapidement; — enfin, que si les deux racines sont égales, ce rapport s'approchera de l'unité sans jamais la dépasser ni l'atteindre. — Dans le premier cas, aussitôt que le rapport sera devenu >1 on discontinuera l'approximation, et l'on sera certain que les deux racines manquent, ou sont imaginaires entre a et b. — Dans le second cas on verra dès la 2de approximation que les deux racines sont réelles et inégales, et on pourra continuer à les approximer séparément, jusqu'à tel nombre de chiffres décimaux exacts qu'on voudra. — Enfin, dans le troisième cas, on se contentera d'approximer la racine de l'un ou de l'autre côté du point de contact, ou bien on cherchera le facteur commun de X et X_1 par le procédé du plus grand commun diviseur, et ce facteur donnera la racine double exactement.

Une équation qui aurait un nombre n de racines égales, serait de la forme:

$$X = (x-a)^n \mathfrak{X} = 0$$

et il est évident, que: la première dérivée de cette équation serait divisible par $(x-a)^{n-1}$, la seconde par $(x-a)^{n-2}$, la troisième par $(x-a)^{n-3}$, etc. jusqu'à la $(n-1)$ième qui ne contiendrait plus le facteur $(x-a)$ qu'au premier degré. — Cela prouve que quand une équation a un nombre n de racines égales à a, sa première dérivée en aura $(n-1)$, sa seconde $(n-2)$ et ainsi de suite, et que parconséquent, cette équation et ses $(n-1)$ premières dérivées auront un facteur commun. — Il résulte de là, qu'en posant $\mathfrak{X}=1$, l'équation aura toutes ses racines égales, et toutes ses dérivées, hors la dernière seront

divisibles par $x-a$, et parconséquent la racine multiple a, serait donnée par l'avant dernière dérivée qui ne contient le facteur $(x-a)$ qu'au 1er degré.

Les racines imaginaires, hors le cas que nous avons examiné (c'est à dire celui où la courbe passe très près de l'axe), ne présent aucune difficulté, puisqu'en déterminant successivement les racines de chaque dérivée, en commençant par celles du 1er et du second degré, on détermine au moyen de ces racines, la position des points de maximum, de minimum, et d'inflexion, de la dérivée d'un degré immédiatement supérieur, et la position de ces points indique de suite si le lieu géométrique auquel ces points appartiennent coupe ou non l'axe des x en autant de points que cette dérivée doit avoir en tout de racines selon son degré. — Les points d'intersection qui manqueront, seront autant de racines imaginaires, et correspondront toujours par couples, soit à un point de maximum ou de minimum, soit à un point d'inflexion composé.

On voit donc, qu'en commençant l'analyse d'une équation par l'avant dernière dérivée, on s'élève successivement à la connaissance des racines de toutes les dérivées de cette équation, et enfin à la connaissance des racines de la proposée, et que cette analyse fait connaître la nature des racines cherchées, et la valeur de celles qui sont réelles avec tel degré d'approximation qu'on voudra.

Observation. Dans le cas où toutes les racines sont réelles et inégales, nous avons vu qu'on obtenait les racines extrêmes par la formation d'une équation du 2^{d} degré; dans le cas où il y a des racines imaginaires ce procédé n'est plus applicable, et l'on déterminera les racines extrêmes directement, par approximation, en prenant la quantité arbitraire α, plus grande que l'abscisse du dernier minimum du côté positif, pour la limite positive, et, moindre que l'abscisse positive (ou plus grande que l'abscisse négative) du dernier point de minimum ou de maximum du côté négatif, pour la limite négative. — On sera sur qu'en choisissant ainsi ces quantités arbitraires, il n'y aura aucun point singuliers entr'elles et la racine cherchée, et parconséquent l'approximation sera convergente dès le second terme, si α est moindre que la racine cherchée, et dès le 1er si cette quantité dépasse la racine.

IX.

Après avoir développé dans les articles précédents, la marche à suivre pour découvrir successivement toutes les racines d'une équation quel que soit son degré, il convient d'examiner la *convergence* que donne la formule, et

les moyens d'évaluer le degré de chacunes des approximations obtenues par l'emploi de la méthode proposée, et d'indiquer le moyen d'arriver promptement à la détermination de la quantité arbitraire α la plus convenable au point de départ de chaque opération.

Soit $Armr'im'$ une portion de courbe, (fig. 10), qui coupe l'axe des x en deux points r et r', et dont les points de maximum et de minimum m' et m sont déjà déterminés par les opérations précédentes; — supposons aussi que mrA, soit l'une des branches extrêmes de la courbe; — il s'agit de déterminer les deux racines Qr et Or' qui correspondent à cette portion de la courbe.

Pour la première de ces racines, Or, nous n'avons pas d'autres données si non que la quantité arbitraire α, qui doit servir de point de départ à l'approximation, doit être moindre que l'abscisse Oa du point minimum m, mais en même temps il est évident que moins la quantité prise pour point de départ différera de la racine cherchée, et plus l'approximation sera rapide; — or, pour atteindre ce but, on substituera dans le polynôme X le plus grand nombre entier Oa', qui soit contenu dans l'abscisse Oa; puis on diminuera ce nombre de l'unité et on le substituera de nouveau dans le polynôme X au lieu de x, et ainsi de suite, et, à chaque substitution nouvelle on examinera le signe du résultat, et l'on continuera de la même manière jusqu'à ce que le résultat de la substitution change de signe. — De cette manière on parvient facilement à deux abscisses: Oa'' et Oa''', dont l'une Oa'' est plus grande que la racine Or, et l'autre Oa''' qui est moindre, et qui ne diffère de la précédente que d'une seule unité. — Si nous nommons α le plus petit et β le plus grand de ces deux nombres, nous aurons donc: $\beta - \alpha = 1$, parconséquent α est le plus grand nombre entier contenu dans la racine cherchée, et comme tel, nous pouvons prendre ce nombre pour bâse de l'approximation.

Pour la racine Or', qui se trouve entre le point d'inflexion i et le point de minimum, m, si la portion ab de laxe, qui se trouve entre ces deux points contient un certain nombre d'unités, on prendra d'abord le plus grand nombre entier contenu dans l'abscisse Ob du point d'inflexion, et on substituera ce nombre à x, dans le polynôme X, pour voir s'il change de signe; — si ce nombre ne change pas le signe du polynôme X, on le prendra pour bâse d'une première approximation, qui donnera une première valeur α'; on prendra ensuite le plus grand nombre entier contenu dans α', pour bâse d'une second approximation, et l'on continuera de la sorte, en n'opérant que sur des nombres entiers, jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre entier qui fasse

changer le signe de X; alors on sera certain que la racine est comprise entre le dernier nombre déduit par la formule d'approximation, et le plus grand nombre entier qu'il contienne.

Si la racine cherchée était située sur une portion de courbe tournant sa convexité vers l'origine, alors on prendrait le nombre entier le plus petit qui puisse contenir l'abscisse du point d'inflexion; — puis après avoir trouvé au moyen de ce nombre la première approximation α', on prendrait le plus petit nombre entier qui puisse contenir α', et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre entier qui fasse changer le signe de X; alors, on est certain que la racine est comprise entre ce dernier nombre entier et le résultat précédent.

On voit donc que par ce procédé, et en opérant seulement sur des nombres entiers, on parvient au bout d'un petit nombre d'opérations fort simples, à trouver deux nombres α et β, qui ne diffèrent de la racine cherchée, l'un en plus, l'autre en moins, que d'une quantité moindre que l'unité, et que par-conséquent il faut prendre l'un de ces nombres pour bâse de l'approximation dans le but de découvrir la partie décimale de la racine.

Examinons à présent, quelle peut être la rapidité de l'approximation que donne la formule, et cherchons à découvrir l'ordre d'unités décimales auquel appartient chacun des résultats successifs de l'opération.

Soit Om (fig. 11) l'abscisse α qui sert de point de départ à l'approximation, et qui est telle, que la différence entre α et la racine, ou entre Om et Or est moindre que l'unité. — Nous avons pour première approximation:

$$\alpha' = \alpha - \frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}} = Om + mt,$$

ou en posant $mt = i$,

$$\alpha' = \alpha + i', \quad \text{et} \quad +i = -\frac{X_{(\alpha)}}{X'_{\alpha}}.$$

Pour seconde approximation, nous aurons:

$$\alpha'' = \alpha' - \frac{X_{(\alpha')}}{X'_{(\alpha')}} = Ot + tt',$$

ou en posant $tt' = i'$,

$$\alpha'' = \alpha' + i' = \alpha + i + i', \quad \text{et} \quad i' = -\frac{X_{(\alpha')}}{X'_{(\alpha')}}.$$

Cherchons la relation qui existe entre i et i'; — pour cela, menons par le point p' la ligne $p'q$ parallèle à la tangente tt, on aura évidemment:

$$pm : mt = p't : tq, \quad \text{ou} \quad X_{(\alpha)} : i = X_{(\alpha')} : tq,$$

d'où l'on tire:

$$tq = i\frac{X_{(\alpha')}}{X_{(\alpha)}},$$

mais, puisque i' ou tt' est une fraction fort petite, on voit qu'en négligeant des quantités fort petites du 2^{d} degré, on peut considérer comme égales les lignes tq et qt'; et poser

$$tq = qt' = \tfrac{1}{2}tt' = \tfrac{1}{2}i',$$

d'où il résulte:

$$i' = 2i\frac{X_{(\alpha')}}{X_{(\alpha)}},$$

mais puisque $\alpha' = \alpha + i$, on aura:

$$X_{(\alpha')} = X_{(\alpha+i)} = X_{(\alpha)} + iX'_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}i^2 X''_{(\alpha)} + \ldots.$$

En se bornant aux trois premiers termes de ce développement, et en les substituant dans l'expression de i', on trouve:

$$i' = \frac{2iX_{(\alpha)} + 2i^2X'_{(\alpha)} + i^3X''_{(\alpha)}}{X_{(\alpha)}} = 2i\left\{1 + i\frac{X'_{(\alpha)}}{X_{(\alpha)}}\right\} + i^3\frac{X''_{(\alpha)}}{X_{(\alpha)}}.$$

Mais puisque: $+i = -\dfrac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$, il s'ensuit que la quantité qui est entre parenthèses devient nulle, et il ne reste que: $i' = +i^3\dfrac{X''_{(\alpha)}}{X_{(\alpha)}}$, ou bien, en remplaçant $X_{(\alpha)}$ par $-iX'_{(\alpha)}$, et simplifiant:

$$i' = -i^2\frac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}.$$

On voit donc, que la quantité i' dont le résultat de l'approximation s'accroit à chaque opération, est proportionnel: 1°, à la second puissance de la quantité i, dont l'opération précédente avait augmenté la bâse α dont on était parti, et 2°, à la quantité $\dfrac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$; il doit être bien entendu d'ailleurs, que cette loi n'est vraie qu'en supposant qui i est une fraction assez petite.

Supposons d'abord, que $\dfrac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$ abstraction faite du signe, soit égal à l'unité, et que l'on soit parvenu à une approximation de la racine que nous représenterons par: e,abc, exprimant par e le nombre et par a, b, et c, les trois premiers chiffres décimaux exacts; — si nous posons: $\alpha = e,ab$ et $\alpha' = e,abc$, nous aurons $i = 0{,}00c$, parconséquent:

$$\alpha'' = \alpha' + i' = \alpha + i + i^2 = e,abc + (0{,}00c)^2 = e,abc00c^2.$$

Mais, c^2 ne pouvant être qu'un nombre de deux chiffres au plus, on voit que la seconde approximation, ne peut affecter que les caractères décimaux du cinquième et du sixième rang, et que parconséquent les premiers quatre chiffres décimaux, au moins, sont exacts; — en nommant d le quatrième chiffre, nous aurons donc: $e,abcd$ pour résultat; — mais en posant de nouveau: $\alpha = e,abc$, et $i = 0{,}000d$, nous aurons:

$$\alpha'' = \alpha + i + i^2 = e,abcd + (0{,}000d)^2 = e,abcd000d^2.$$

Ce qui fait voir que cette nouvelle opération ne peut affecter que le 7me et le 8me chiffre, et que parconséquent les six chiffres du résultat précédent étaient tous exacts. — Il suit de là, que quand on a l'expression de la racine avec trois chiffres décimaux exacts, l'opération suivante en donnera six.

Soit donc: $e,abcdef$ l'expression de la racine avec six chiffres exacts; — posons: $\alpha = e,abcde$ et $i = 0{,}00000f$, nous aurons comme ci-dessus:

$$\alpha'' = \alpha + i + i^2 = e,abcdef + 0{,}000\,000\,000\,00f^2 = e,abcdef00000f^2.$$

Ce qui prouve que quand on a cinq chiffres décimaux exacts, l'opération suivante en donne dix, et l'on voit qu'en poursuivant de cette manière on démontrerait aisément qu'à chaque opération nouvelle le nombre des décimales exactes se trouve doublé.

Si la quantité $\frac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$ au lieu d'être égale à l'unité comme nous l'avions supposée, était moindre, il est évident que la rapidité de l'approximation serait encore plus grande, mais au contraire cette rapidité se trouverait diminuée, et le nombre des chiffres décimaux exacts de chaque opération serait moindre, si $\frac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$ était plus grand que l'unité.

Observons, que quand la racine cherchée sera proche d'un point d'inflexion du lieu géométrique de X, la quantité $X''_{(\alpha)}$ deviendra fort petite, puisque l'abscisse du point d'inflexion de X est la même que celle qui correspond à la racine de X''; — en même temps, la quantité $X'_{(\alpha)}$ devient la plus grande possible, puisque la même abscisse correspond à celle d'un point de maximum ou de minimum de X'; — parconséquent dans ce cas, le facteur $\frac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$ devient le plus petit possible. — Le contraire a lieu, quand la racine cherchée est peu éloignée d'un point de maximum ou de minimum du lieu géométrique

de X, car alors c'est $X'_{(\alpha)}$ qui diminue et s'approche de zéro, et parconséquent $\frac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$ peut devenir une quantité très grande.

Cette observation n'ôte rien à la valeur du mode d'approximation adopté, mais comme il peut en résulter de l'incertitude sur le nombre des chiffres décimaux exacts de chaque opération, il faut écarter cette incertitude soit en déterminant la quantité $\frac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$, soit en employant comme ***Fourrier***, deux limites.

Supposons, pour cela, (fig. 12) que l'on soit arrivé par les opérations précédentes à deux abscisses $Om = \alpha$ et $Om' = \beta$, dont la première est moindre et la seconde plus grande que la racine Or qu'il faut déterminer, et qui ne diffèrent entr'elles que de l'unité; — la courbe tournant sa convexité vers le point m, il faudra commencer l'approximation par la plus petite des deux limites.

Élevons les ordonnées mp et $m'p'$, et menons au point p la tangente tt à la courbe, nous aurons construit la première approximation:

$$Ot = Om + mt = \alpha - \frac{X_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}} = \alpha'$$

qui est moindre que la racine cherchée. — Ensuite, par le point p' menons la ligne $p'q$ parallèle à la tangente tt, cette ligne coupera l'axe en un point q situé entre r et la plus grande limite β. — Mais, puisque les triangles: mpt et $m'p'q$ sont semblables, et que l'ordonnée $m'p'$ a pour expression $X_{(\beta)}$, nous aurons évidemment:

$$m'q = \frac{X_{(\beta)}}{X'_{(\alpha)}},$$

et parconséquent:

$$Oq = Om' - m'q = \beta - \frac{X_{(\beta)}}{X'_{(\alpha)}} = \beta'.$$

Mais il est évident que les quantités α' et β' ainsi construites, sont deux nouvelles limites, l'une, β', plus grande, et l'autre, α', moindre que la racine cherchée, quoique beaucoup plus rapprochées d'elle que ne l'étaient les nombres α et β dont on était parti. — Pour avoir des limites encore plus rapprochées, répetons sur α' et β' la même opération, nous aurons:

$$\alpha' - \frac{X_{(\alpha')}}{X'_{(\alpha')}} = \alpha'' \quad \text{et} \quad \beta' - \frac{X_{(\beta')}}{X'_{(\alpha')}} = \beta'',$$

et ainsi de suite, et à chaque opération nous obtiendrons deux nouvelles limites

qui se rapprocheront continuellement et finiront par ne plus différer entr'elles que par les chiffres décimaux d'un rang très éloigné.

Supposons par exemple qu'à la troisième opération on ait trouvé:

$$\alpha''' = e, abcdefg \ldots,$$
$$\beta''' = e, abcdelm \ldots,$$

puisque la racine est comprise entre ces deux nombres, il est évident que tous les chiffres: $e, abcde$ qui sont les mêmes dans les deux limites, appartiennent à la racine cherchée, et que parconséquent la dernière opération détermine cinq chiffres décimaux exacts.

Pour compléter l'exposé de la méthode, il ne reste plus que d'en faire quelques applications, ce qui sera l'objet des articles suivants.

X.

Après avoir exposé d'une manière générale la méthode pour la détermination des racines des équations de tous les degrés, avec tel degré d'approximation qu'on voudra, faisons quelques applications qui en faciliteront l'intelligence.

Pour premier exemple, cherchons les racines de l'équation du 7me degré

$$X = +x^7 + 9x^6 - 108x^5 + 386x^4 - 713x^3 + 747x^2 - 420x + 98 = 0,$$

dont les dérivées seront:

$$X' = + 7x^6 + 54x^5 - 540x^4 + 1544x^3 - 2139x^2 + 1494x - 420,$$
$$X'' = + 42x^5 + 270x^4 - 2160x^3 + 4632x^2 - 4278x + 1494,$$
$$X''' = + 210x^4 + 1080x^3 - 6480x^2 + 9264x - 4278,$$
$$X^{IV} = + 840x^3 + 3240x^2 - 12960x + 9264,$$
$$X^{V} = + 2520x^2 + 6480x - 12960,$$
$$X^{VI} = + 5040x + 6480,$$
$$X^{VII} = + 5040.$$

D'abord, en égalant à zéro le polynome X^{VI} qui est du premier degré, on trouve: $x = -1{,}28$ qui est l'abscisse du point de minimum, de la courbe que représente l'équation du second degré $X^{V} = 0$, ou $2520x^2 + 6480x - 12960 = 0$, et aussi l'abscisse du point d'inflexion du lieu géométrique de $X^{IV} = 0$.

Ensuite en résolvant l'équation $X^{V} = 0$, on trouve deux racines réelles: $x = +0{,}80$ et $x = -3{,}36$, qui sont aussi les abscisses: du point de minimum et de celui de maximum de X^{IV}. — Nous avons donc pour les points singuliers de X^{IV}:

Valeurs des abscisses.	Désignation des points singuliers.	Valeurs des ordonnées correspondantes.
$-3{,}36$	point de maximum	$+57.637{,}20\ldots$
$-1{,}28$	point d'inflexion simple	$+30.239{,}16\ldots$
$+0{,}80$	point de minimum	$+1399{,}68\ldots$

Puisque l'ordonnée du point de minimum est positive, il s'ensuit que la courbe aura la forme indiquée par la (fig. 13); — cette courbe sera située au dessus de l'axe $(-X^{IV}, +X^{IV})$ et aura parconséquent deux racines imaginaires, et une seule racine réelle, formée par l'intersection de l'axe $(-X^{IV}, +X^{IV})$ avec la branche gauche ou descendante de la courbe. — Pour trouver cette racine réelle, qui est située à gauche du point de maximum, dont l'abscisse est $-3{,}36$, il faut, dans X^{IV} substituer des nombres entiers et négatifs plus grand que $-3{,}36$ jusqu'à ce que l'ordonnée change de signe; ainsi en substituant successivement -4, -5, -6, -7 etc. on trouvera:

$$X^{IV}_{(-6)} = +22224\ldots \quad \text{et} \quad X^{IV}_{(-7)} = -29376\ldots$$

ce qui prouve que la racine cherchée est entre -6 et -7.

L'abscisse -7 étant celle d'un point de l'axe qui est situé du côté de la convexité de la courbe, doit être prise pour bâse d'une première approximation, et l'on trouve:

$$X^{IV}_{(-7)} = -29376$$

et

$$X^{V}_{(-7)} = +65150,$$

d'où

$$x = -7 - \frac{X^{IV}_{(-7)}}{X^{V}_{(-7)}} = -7 + \frac{29376}{65150} = -6{,}59\ldots.$$

pour première approximation; — nous ne conserverons même, pour l'analyse de la dérivée supérieure X''', que le premier chiffre décimal de cette racine, et nous prendrons $-6{,}5$ pour l'abscisse correspondante à la racine de X^{IV} et au point minimum de X'''. —

Pour construire le lieu géométrique de l'équation $X''' = 0$, qui est du 4me degré, nous avons donc:

Valeurs des abscisses.	Points correspondants de X^{IV}.	Ordonnées de X'''.	Points correspondants de X'''.
$-6{,}50$ . . .	racine réelle négative . . .	-270.001 . . .	point de minimum,
$-3{,}36$ . . .	point de maximum . . .	-122.752 . . .	point d'inflexion simple,
$+0{,}80$ . . .	point de minimum . . .	-375 . . .	point d'inflexion composé,

puisque les ordonnées de ces trois points sont toutes négatives, il s'ensuit que les racines réelles de X''' seront formées par l'intersection de l'axe $(-X''', +X''')$ avec les deux branches extrêmes ou ascendante de la courbe; — l'une de ces racines sera négative et plus grande que $-6{,}50$, c'est à dire que l'abscisse du point de minimum, et l'autre sera positive et plus grande que $+0{,}8$, ou que l'abscisse du point d'inflexion composée, qui, n'étant pas sur l'axe, indique un couple de racines imaginaires.

Pour déterminer la plus grande de ces deux racines, en mettant dans X''', successivement, les nombres: -7, -8, -9, -10, etc. nous trouvons:

$$X'''_{(-9)} = -22404, \quad \text{et} \quad X'''_{(-10)} = +274.082;$$

ce qui prouve que la racine est comprise entre les nombres -9 et -10. — En substituant ce dernier nombre dans la dérivée X^{IV} on trouve:

$$X^{IV}_{(-10)} = -377.136;$$

ce qui donne les deux nouvelles limites:

$$x = -10 - \frac{X'''_{(-10)}}{X^{IV}_{(-10)}} = -10 + \frac{274082}{377136} = -9{,}2\ldots.$$

en nous bornant au 1er chiffre décimal et

$$x = -9 - \frac{X'''_{(-9)}}{X^{IV}_{(-10)}} = -9 - \frac{22404}{377136} = -9{,}05$$

pour limite inférieure.

La racine cherchée est donc comprise entre $-9{,}2$ et $-9{,}05$, et comme nous n'avons pas besoin ici d'une grande approximation, nous nous bornerons à prendre la moyenne entre ces deux limites, ce qui donne avec deux décimales le nombre $-9{,}12$ que nous porterons au tableau.

Pour la seconde racine, qui est plus grande que $+0{,}8$, nous voyons en mettant pour x les nombres $+1$, $+2$, etc. que le nombre $+2$ fait changer de signe au polynôme X''', et que la racine cherchée est comprise, parconséquent, entre ces deux nombres. — Substituant donc aussi $+2$ dans le polynôme X^{IV}, et opérant comme ci-dessus, on aura deux limites plus rapprochées qui seront: $+1{,}80$ et $+1{,}06$ d'où l'on tire la moyenne $+1{,}43$, valeur approchée et que nous porterons au tableau.

Nous aurons donc pour passer à X'':

Valeurs des abscisses.	Points correspondants de X'''.	Ordonnées de X''.	Points singuliers de X''.
$-9{,}12$	racine	.... $+1.282.034$	point de maximum,
$-6{,}50$	point de minimum	.... $+119.073$	point d'inflexion simple,
$+1{,}43$	racine	.... -76	point de minimum.

Puisque le lieu géométrique de X'' n'a qu'un seul point de maximum au dessus de l'axe, et un seul point de minimum au dessous, il s'ensuit que ce lieu géométrique ne coupera l'axe qu'en trois points, et que parconséquent X'' qui est du cinquième degré n'a que trois racines réelles. — L'une des racines, formée par l'intersection de l'axe avec la branche descendante, sera négative et plus grande que l'abscisse $-9{,}12$ du point de maximum; — l'autre racine formée par l'intersection de l'axe avec la branche droite ou ascendante, sera positive et plus grande que l'abscisse $+1{,}43$ du point de minimum; — enfin, la troisième racine sera formée par l'intersection de l'axe avec la portion de courbe comprise entre le point d'inflexion et le point de minimum, et sera comprise, parconséquent entre les valeurs $-6{,}50$ et $+1{,}43$ des abscisses de ces deux points.

Commençons par chercher cette dernière racine; — pour cela il faut substituer dans X'' successivement les nombres entiers compris entre $+1{,}43$ et $-6{,}50$ qui sont $+1$, 0, -1, -2, -3, -4, -5 et -6; — or en commençant par le premier de ces nombres $+1$, on trouve que X'' se réduit à zéro, et que parconséquent la racine cherchée est égale à $+1$.

Pour la plus grande racine négative, mettons successivement les nombres -10, -11, -12, etc. dans le polynôme X'', nous trouvons:

$$X''_{(-11)} = +572912 \quad \text{et} \quad X''_{(-12)} = -399.914.$$

Ce qui prouve que la racine cherchée est comprise entre les nombres -11 et -12. — En mettant -12, dans la première dérivée de X'', qui est X''', on trouve: $X'''_{(-12)} = +1.439.754$, d'où l'on tire deux nouvelles limites:

$$\left.\begin{aligned} x &= -12 - \frac{X''_{(-12)}}{X'''_{(-12)}} = -12 + \frac{399.914}{1.439.754} = -11{,}7 \ldots . \\ \text{et} \\ x &= -11 - \frac{X''_{(-11)}}{X'''_{(-12)}} = -11 - \frac{572.912}{1.439.754} = -11{,}3 \ldots . \end{aligned}\right\} \text{en se bornant à la première décimale,}$$

d'où l'on tire la moyenne $-11{,}5$ que nous porterons au tableau comme suffisamment approchée.

Enfin, pour la troisième racine, en substituant pour x les nombres $+2$, $+3$, etc. plus grands que $+1{,}43$, l'on trouve:

$$X''_{(+2)} = -150 \quad \text{et} \quad X''_{(+3)} = +4.104,$$

ce qui indique que la racine est entre $+2$ et $+3$. — En mettant $+3$ dans X''' on aura pour nouvelles limites:

$$x = +3 - \frac{X''_{(+3)}}{X'''_{(+3)}} = +3 - \frac{4104}{11364} = +2{,}6\ldots.$$

et

$$x = +2 - \frac{X''_{(+2)}}{X'''_{(+3)}} = +2 + \frac{150}{11364} = +2{,}03\ldots.,$$

d'où nous tirons la moyenne $+2{,}3$ que nous porterons au tableau.

Pour déterminer les points singuliers de l'équation X' qui est du 6me degré, nous aurons donc les valeurs suivantes:

Valeurs des abscisses.	Points correspondants de X''.	Valeurs des ordonnées de X'.	Points singuliers de X'.
$-11{,}50$	racine	.... $-6.763.229$	point de minimum,
$-\ 9{,}12$	point de maximum	.... $-4.467.619$	point d'inflexion,
$+\ 1$	racine	.... $0{,}0$	point de maximum et racine double,
$+\ 1{,}43$	point de minimum	.... -20	point d'inflexion,
$+\ 2{,}30$	racine	.... -115	point de minimum.

L'équation $X' = 0$ étant du sixième degré devrait avoir deux points de maximum et trois points de minimum, mais nous voyons d'après le tableau ci dessus, qu'il n'y a que deux points de minimum et un seul de maximum, parconséquent, l'un de ces points est un point composé, et correspond à un couple de racines imaginaires dont nous ne nous occuperons point. — En outre, l'ordonnée du point de maximum étant zéro, cela indique que l'équation a en ce point deux racines égales à $+1$. — Des deux racines réelles qu'il nous reste à déterminer, l'un est formée par la branche ascendante gauche, et parconséquent négative et plus grande que l'abscisse $-11{,}50$ du point de minimum situé du côté négatif; — l'autre racine est formée par la branche ascendante droite, et parconséquent positive et plus grande que l'abssissé $+2{,}30$, du point de minimum situé du côté positif.

Pour déterminer la première de ces racines, substituons successivement dans X' les nombres entiers négatifs plus grands que $-11,5$, nous trouverons:

$$X'_{(-14)} = -1.834.312, \qquad X'_{(-15)} = +4.685.520,$$

ce qui prouve que la racine est entre -14 et -15; — mettant aussi -15 dans X'' nous aurons: $X''_{(-15)} = -10.827.136$, d'où l'on tire les deux nouvelles limites:

$$x = -15 - \frac{X'_{(-15)}}{X''_{(-15)}} = -15 + \frac{4.685.520}{10.827.136} = -14,56 \ldots.$$

et

$$x = -14 - \frac{X'_{(-14)}}{X''_{(-15)}} = -14 - \frac{1.834.312}{10.827.136} = -14,16 \ldots,$$

dont la moyenne, avec une seule décimale est: $-14,3 \ldots$ que nous porterons au tableau.

Pour la dernière racine, en substituant les nombres entiers plus grands que $+2,3$, nous trouvons: $X'_{(+3)} = +967$, mais puisque $X'_{(+2,3)} = -115$, il s'ensuit que la racine est entre $+2,3$ et $+3$. — En mettant $+3$ dans X'' on aura: $X''_{(+3)} = +3104$, d'où l'on tire les deux nouvelles limites:

$$x = +3 - \frac{X'_{(+3)}}{X''_{(+3)}} = +3 - \frac{967}{3104} = +2,68 \ldots.$$

et

$$x = +2,3 - \frac{X'_{(+2,3)}}{X''_{(+3)}} = +2,3 + \frac{115}{3104} = +2,33 \ldots,$$

dont la moyenne est $+2,5$ que nous porterons au tableau.

Passons enfin à la recherche des racines de la proposée X pour le lieu géométrique de laquelle nous avons les données suivantes:

Valeurs des abscisses.	Points correspondants de X'.	Valeurs des ordonnées de X.	Points singuliers de X.
$-14,3$	racine	$+37.645.498$	point de maximum,
$-11,5$	point de minimum	$+23.979.187$	point d'inflexion simple,
$+1$	point de maximum et racine double	0	point d'inflexion composé, dont l'axe est la tangente, et racine triple,
$+2,3$	point de minimum	$-69,7$	point d'inflexion simple,
$+2,5$	racine	$-307,82$	point de minimum.

Nous voyons d'après ce tableau que le lieu géométrique de X n'a qu'un seul point de maximum dont l'ordonnée est positive, un seul point de minimum dont l'ordonnée est négative, deux points d'inflexion simples et enfin un point d'inflexion composé dont la tangente est l'axe des abscisses, et qui donne trois racines égales à $+1$; — il suit delà, qu'outre les trois racines égales, la courbe a encore deux racines réelles, l'une n'égative et plus grande que $-14{,}3$ et l'autre positive et plus grande que $+2{,}5$, formées par l'intersection de l'axe avec les branches descendante et ascendante de la courbe. — Enfin, deux dernières racines, qui sont imaginaires.

Puisque les trois racines égales sont connues, il ne reste plus qu'à déterminer les deux racines extrêmes; — pour avoir la première, mettons successivement pour x dans l'équation donnée les nombres entiers négatifs plus grands que $-14{,}3$, qui sont -15, -16, -17, etc. nous trouverons:

$$X_{(-16)} = +24.221.090 \quad \text{et} \quad X_{(-17)} = -3.780.800,$$

le changement de signe en passant du nombre -16 au nombre -17, fait voir que la racine cherchée est entre ces deux nombres.

Comme le nombre -17 correspond à la convexité de la courbe, c'est ce nombre qui doit être près pour bâse d'une nouvelle approximation, nous aurons donc en mettant ce nombre pour x dans la première dérivée:

$$X'_{(-17)} = +38.959.704 \ldots,$$

d'où l'on tire pour deux nouvelles limites:

$$x = -17 - \frac{X_{(-17)}}{X'_{(-17)}} = -17 + \frac{3.790.840}{38.959.704} = -16{,}902.953 \ldots,$$

$$x = -17 - \frac{X_{(-16)}}{X_{(-17)}} = -17 - \frac{24.221.090}{38.959.704} = -16{,}621.695 \ldots.$$

En substituant ces deux nombres avec une seule décimale, dans X, et le plus grand des deux seulement dans la dérivée X', il vient:

$$X_{(-16{,}9)} = -18.433{,}954.769.9 \ldots,$$
$$X_{(-16{,}6)} = +\ 9.893.789{,}316.998 \ldots,$$
$$X'_{(-16{,}9)} = +36.504.369{,}838.907 \ldots,$$

et pour les deux nouvelles limites:

$$x = -16{,}9 - \frac{X_{(-16{,}9)}}{X'_{(-16{,}9)}} = -16{,}899.495.0 \ldots,$$

$$x = -16{,}6 - \frac{X_{(-16{,}6)}}{X'_{(-16{,}9)}} = -16{,}871.030 \ldots,$$

la racine cherchée est donc comprise entre les deux nombres:

$$-16{,}899.495.0\ldots. \quad \text{et} \quad -16{,}871.030\ldots.$$

et comme ces deux nombres n'ont de commun que les nombres entiers et le premier chiffre décimal, 8, nous ne pouvons considérer que ce seul chiffre comme appartenant à la racine.

Pour former deux nouvelles limites au moyen des deux nombres trouvés, il faudrait prendre ces deux nombres avec toutes leurs décimales, ou au moins avec un assez grand nombre, et les substituer dans X et X'; — mais comme l'opération serait trop longue et trop penible, si l'on conservait un trop grand nombre de chiffres décimaux, il est nécessaire de s'assurer préalablement du nombre de chiffres que l'on doit conserver, et de celui qu'on peut négliger, sans sortir des conditions de l'opération, c'est à dire sans que l'ordonnée change de signe pour la plus grande des deux limites. — En effet, pour la plus petite des deux limites, quel que soit le nombre des chiffres décimaux qu'on néglige, puisqu'on ne fait par là que diminuer cette quantité, on est sûr que cette limite reste moindre que la racine cherchée; — au contraire pour la limite supérieure, si l'on venait à négliger un trop grand nombre de caractères décimaux, il pourrait fort bien arriver qu'on diminuerait trop cette limite, et qu'on la rendrait inférieure à la racine cherchée, de supérieure qu'elle était. —

Pour connaître le nombre des chiffres à conserver, il faut employer l'équation:

$$i' = -i^2 \cdot \frac{X''_{(\alpha)}}{X'_{(\alpha)}}$$

que nous avons déduite dans l'article précédent; nous avons ici $\alpha = -16{,}9$, $\alpha' = -16{,}899.495.0$, d'où l'on tire:

$$\alpha - \alpha' = i = 0{,}000.519\ldots., \text{ ou simplement: } i = 0{,}0005\ldots.$$

de plus en mettant $-16{,}9$ dans la dérivée du second ordre X'', on aura:

$$X''_{(-16{,}9)} = -24.047.479{,}7\ldots.,$$

et comme:

$$X'_{(-16{,}9)} = +36.504.369{,}8\ldots.,$$

on en tire:

$$\frac{X'_{(-16{,}9)}}{X'_{(-16{,}9)}} = -\frac{24.047.479{,}7\ldots.}{36.504.369{,}8\ldots.} = -0{,}658,$$

d'où:

$$i' = -i^2 \frac{X''_{(a)}}{X'_{(a)}} = -(0{,}0005)^2.(-0{,}658) = +0{,}000.000.164.50\ldots.$$

(D'après la position de la courbe il est évident que la racine cherchée et l'accroissement i' sont de signes contraires.) Ce résultat prouve que l'accroissement i' d'une nouvelle opération, ne pourrait affecter que la 7me décimale du résultat précédent, et la sixième si la septième est moindre que l'unité; — or, dans le cas actuel nous avons $-16{,}899.495.0\ldots.$ dont le 7me chiffre décimal est zéro, d'où il suit qu'en retranchant de ce nombre la valeur trouvée pour i', la sixime décimale sera aussi affectée et l'on aurait $-16{,}899.494\ldots.$ valeur approchée, dont les cinq premiers chiffres décimaux sont les mêmes que dans le nombre précédent et parconséquent exacts et appartiennent à la racine; — on voit donc, que pour trouver une nouvelle limite supérieure à la racine, et plus approchée que la précédente, il faut conserver les six premiers chiffres décimaux de cette dernière.

Il semblerait d'après ce résultat que la méthode des deux limites se trouve en défaut, puisqu'elle n'indique qu'un seul chiffre décimal certain, tandis que nous venons de voir qu'il y en a cinq, et cependant, nous eussions pu prévoir d'avance ce résultat, en comparant les valeurs trouvées pour $X_{(-16{,}9)}$ et $X_{(-16{,}6)}$, car la seconde valeur est plus de 500 fois plus grande que la première, ou si l'on veut, l'ordonnée correspondante à l'abscisse $(-16{,}6)$ est plus de cinq cent fois plus grande que celle qui correspond à l'abscisse $(-16{,}9)$, d'où il résulte clairement que la racine est beaucoup plus proche de ce dernier nombre. — D'ailleurs, en poursuivant par la méthode des deux limites, on arriverait, quoique moins vîte, au même résultat; — en effet, si nous prenons pour bâse d'une nouvelle opération les nombres trouvés pour les deux dernières limites, en conservant seulement les deux premières décimales, nous aurons pour la limite supérieure le nombre $-16{,}89$ qui étant substitué dans X, donne:

$$X_{(-16{,}89)} = +345.408{,}732.335\ldots.$$

Mais, puisque le résultat de cette substitution a le signe $+$ au lieu du signe $-$ qu'il devrait avoir, il s'ensuit que le nombre substitué $(-16{,}89)$ est plus petit que la racine, et ne peut pas servir de limite supérieure, mais aussi comme il est beaucoup plus approché de la racine que la limite inférieure précédente $(-16{,}6)$, ainsi en prenant $-16{,}89$ au lieu de $-16{,}6$, nous aurons pour

limite inférieure:

$$x = -16{,}89 - \frac{X_{(-16{,}89)}}{X'_{(-16{,}9)}} = -16{,}89 - \frac{345.408....}{36.512.369....} = -16{,}899\,45....$$

Les quatre premiers chiffres décimaux de cette nouvelle limite, étant les mêmes que les quatre premiers chiffres décimaux de la limite supérieure, nous en concluons que ces quatre chiffres sont exacts, et parconséquent pour continuer la recherche des limites, il faudra prendre pour la limite supérieure au moins les cinq premiers chiffres décimaux de la limite supérieure précédemment trouvée; et, si le résultat de la substitution avait encore le signe +, nous déterminerions une nouvelle limite inféreure encore plus approchée, et qui aurait alors cinq chiffres communs avec la limite supérieure; — on continuerait ainsi jusqu'à ce que le nombre des chiffres décimaux conservés soit tel, que le résultat de la substitution ait le signe qui convient à la limite supérieure. — Je ne pousserait pas plus loin ce résultat, qui ne diffère de la vraie racine que de moins d'un millionième d'unité, mais il est facile de voir qu'en prenant pour bâse d'une nouvelle approximation le nombre trouvé, avec les six premiers chiffres décimaux, l'opération suivante devra donner au moins dix chiffres exacts, la suivante 20, et ainsi de suite, mais on fera bien chaque fois, de s'assurer du nombre des chiffres exacts, au moyen de l'équation $i' = -i^2 \frac{X''_{(a)}}{X'_{(a)}}$ comme nous l'avons fait dans cet exemple.

Il ne nous reste plus pour terminer l'analyse de l'équation donnée, qu'à déterminer la dernière racine réelle, qui est, comme nous l'avons vu, positive et plus grande que +2,5. — Or en essayant d'abord le nombre +3, nous trouvons:

$$X_{(+3)} = +80,$$

ce qui prouve que la racine est entre +2,5 et +3, puisque l'ordonnée $X_{(+25)}$ est négative; — ainsi en mettant aussi +3 dans X' nous aurons:

$$X'_{(+3)} = +984,$$

d'où nous aurons une première approximation:

$$x = +3 - \frac{X_{(+3)}}{X'_{(+3)}} = +3 - \frac{80}{984} = +2{,}918.699.1....$$

Pour une seconde approximation, prenons +2,9 en négligeant le reste des

chiffres décimaux, nous aurons:

$$X_{(+2,9)} = +0{,}232.099.9\ldots,$$

résultat qui fait voir que l'ordonnée de l'abscisse $+2{,}9$ est fort petite, et que le nombre $+2{,}9$ est parconséquent très près de la racine; — mettant donc aussi $+2{,}9$ dans les deux dérivées: X' et X'' nous aurons:

$$X'_{(+2,9)} = +826{,}922\,707\ldots,$$
$$X''_{(+2,9)} = +3073{,}948\ldots.$$

Au moyen de la première de ces valeurs nous trouvons pour seconde approximation:

$$x = +2{,}9 - \frac{X_{(+2,9)}}{X'_{(+2,9)}} = +2{,}899.719.32\ldots.$$

Pour connaître le nombre de chiffres décimaux exacts de cette valeur, nous aurons

$i = +2{,}9 - 2{,}899.719.32 = +0{,}000\,28\ldots$ en ne gardant que 5 décimales,

d'où,

$$i' = -i^2\frac{X''_{(+2,9)}}{X'_{(+2,9)}} = -(0{,}000\,28)^2\left\{\frac{3073{,}848}{826{,}922\,707}\right\} = -0{,}000\,000\,292\ldots,$$

et, puisque le premier chiffre significatif de cette valeur se trouve au 7me rang des décimales, et moindre que la 7me décimale du résultat précédent, il sensuit, qu'une nouvelle approximation ne saurait affecter le résultat précédent qu'à partir de la 7me décimale et parconséquent que les six premiers chiffres décimaux déjà trouvés sont exacts et appartiennent à la racine cherchée. — Il faudra donc pour une nouvelle opération conserver les sept premiers caractères décimaux de la valeur précédente, et l'on obtiendrait au moins douze chiffres décimaux exacts.

Je ne pousserai pas plus loin cette recherche, ce que j'ai dit me paraissant suffisant pour l'intelligence de la méthode, mais dans l'article suivant je vais indiquer l'application qu'on en peut faire, à l'extraction des racines des nombres, quel que soit l'exposant du radical.

XI.

Soit A un nombre quelconque dont on demande la racine $m^{\text{ième}}$; on aura, en nommant x la racine cherchée:

$$x = \sqrt[m]{A},$$

ou bien en élevant à la $m^{\text{ième}}$ puissance:

$$x^m - A = 0,$$

équation que nous pouvons résoudre par la méthode exposée dans les articles précédents.

Supposons par exemples, que le nombre donné A soit égal à 6589. dont on demande la racine 3me, on aura: $m = 3$, et

$$X = +x^3 - 6589 = 0,$$

dont les dérivées sont:

$$X' = +3x^2,$$
$$X'' = +6x,$$
$$X''' = +6.$$

Nous voyons d'après ces équations, que le lieu géométrique de la première n'a qu'un seul point où la touchante soit parallèle à l'axe; ce point correspond à $x = 0$, et $X_{(0)} = -6589$; — comme $x = 0$ donne aussi $X''_{(0)} = 0$ on en conclut que ce point est un point d'inflexion, qui correspond à deux racines imaginaires, et dont partent les deux branches de la courbe, l'une descendente, du côté des x négatifs, l'autre ascendante du côté des x positifs, et la racine réelle de l'équation sera formée par l'intersection de l'axe avec la branche ascendante, et sera un nombre positif; — on voit avec un peu d'attention que ce nombre doit être composé de deux chiffres, parconséquent, en mettant dans X les nombres de deux chiffres, $+10$, $+20$, $+30$ etc. on arrivera à deux résultats de signes différents, ainsi on trouvera:

$$X_{(+10)} = -5589 \quad \text{et} \quad X_{(+20)} = +1411,$$

ce qui prouve que la racine cherchée est entre $+10$ et $+20$. — En prenant la moyenne de ces deux nombres qui est $+15$, nous aurons $X_{(+15)} = -3214$, ce qui prouve que la racine est entre $+15$ et $+20$, et plus près de ce dernier nombre, nous mettrons donc successivement $+18$, et $+19$, et nous trouverons $X_{(+18)} = -757$ et $X_{(+19)} = +270$, ce qui prouve que la racine

est entre les deux nombres entiers $+18$ et $+19$, qui ne diffèrent entr'eux que de l'unité.

L'abscisse $+19$ étant celle qui correspond à la convexité de la courbe, nous la prendrons pour bâse de l'approximation, et nous aurons en la substituant dans X',

$$X'_{(+19)} = +1083,$$

d'où

$$x = +19 - \frac{270}{1083} = +18{,}750\,792\ldots.$$ pour première valeur approchée.

En prenant pour seconde valeur approchée, $+18{,}75$ on aura:

$$X_{(+18{,}75)} = +2{,}796.875 \quad \text{et} \quad X'_{(+18{,}75)} = +1054{,}687500\ldots.,$$

d'où l'on tire la seconde approximation:

$$x = +18{,}75 - \frac{2{,}796\,875}{1054{,}687\,500} = +18{,}747.348.14\ldots.$$

Pour connaître le nombre de chiffres exacts que donne cette dernière approximation, posons $i = X_{(+19)} - X_{(+18{,}75)} = +0{,}00265\ldots.$ et substituons: $+18{,}75$ dans X'', nous aurons: $X''_{(+18{,}75)} = +112{,}50$, d'où l'on tire:

$$\frac{X''_{(+18{,}75)}}{X'_{(+18{,}75)}} = \frac{+112{,}5000}{+1054{,}6875} = 0{,}106\,66\ldots.,$$

parconséquent l'équation en i' et i, sera:

$$i' = -i^2 \frac{X''_{(+18{,}75)}}{X'_{(18{,}75)}} = -(0{,}00265)^2(0{,}10666\ldots.) = 0{,}000.000.748.598.50\ldots,$$

mais comme le 7me chiffre décimal de cette valeur, surpasse le 7me chiffre décimal de $X_{(+18{,}75)}$ il s'ensuit que quand on fera une nouvelle approximation, le 6me chiffre seulement du résultat précédent se trouverait affecté; — ainsi, la dernière approximation a cinq chiffres décimaux exacts, et ne diffère de la racine que de moins d'un cent-millième d'unité.

En prenant le nombre trouvé, avec les six premières décimales pour bâse d'une nouvelle approximation, on aura:

$X_{(+18{,}747.348)} = +0{,}000.239.343.448.208.192\ldots.$ en nous arrêtant à 18 décimales;

$X'_{(+18{,}747.348)} = +1054{,}389.171.099.312.000.000\ldots.,$

$X''_{(+18{,}747.348)} = +\ 112{,}484.088.000.000.000.000\ldots.,$

d'où la nouvelle approximation sera donnée par:

$$x = +18{,}747.348 - \frac{X_{(+18,747.348)}}{X'_{(+18,747.348)}},$$

et en effectuant le calcul:

$x = +18{,}747.347.773.002.744.349\ldots.$ avec dix-huit décimales.

Pour savoir le nombre des chiffres exacts, nommerons i la différence entre cette valeur et la précédente, qui est: $i = 0{,}000.000.22\ldots.$ en ne conservant que les deux premiers chiffres significatifs, ce qui suffit, d'où l'équation en i et i' donne:

$$i' = -(0{,}000.000.22)^2 . \frac{X''_{(+18,747.348)}}{X'_{(+18,747.348)}},$$

ou, en effectuant les calculs:

$$i' = -0{,}000.000.000.000.005.130.4\ldots.$$

Comme le 15me chiffre décimal de cette valeur est plus fort que la quinzième décimale du résultat précédent, il s'ensuit qu'une nouvelle opération n'affecterait le nombre trouvé qu'à partir du 14me chiffre décimal, et que parconséquent les 13 premières décimales sont exactes et appartiennent à la racine cherchée, on aura donc:

$$x = +18{,}747.347.773.002.7$$

pour la racine cherchée, avec 13 chiffres décimaux ce qui est bien suffisant dans la plupart des calculs, à moins qu'on ne veuille pousser l'approximation plus loin pour reconnaître si la partie décimale ne forme pas une fraction périodique.

On voit aisément que la marche du calcul eût été exactement semblable pour toute autre racine que celle du 3me degré, et nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette application, nous observerons seulement que le problême général de l'extraction des racines doit se diviser en quatre cas distincts, dont chacun donne une position particulière au lieu géométrique, ainsi: m étant un nombre entier quelconque, nous aurons:

1°. $x = \sqrt[2m+1]{+A}$ ou $x^{2m+1} - A = 0$, pour la racine d'un degré *impair* du nombre *positif* $+A$; — cette racine est formé par l'intersection de l'axe avec la branche ascendante; — voir la (fig. 14).

2°. $x = \sqrt[2m+1]{-A}$ ou $x^{2m+1} + A = 0$, pour la racine *impaire* du nombre *négatif* $-A$; — cette racine est formée par l'intersection de l'axe avec la branche descendante de la courbe; — voir la (fig. 15).

3°. $x = \pm \sqrt[2m]{+A}$ ou $x^{2m} - A = 0$, pour la racine d'un degré *pair* du nombre *positif* $+A$; — les deux racines égales et de signes contraires sont formées par les intersections de l'axe avec les deux branches de la courbe, qui sont toutes deux ascendantes; — voir la (fig. 16).

4°. Enfin $x = \pm \sqrt[2m]{-A}$ ou $x^{2m} + A = 0$, pour la racine d'un degré *pair* du nombre *négatif* $-A$; — la courbe est située comme on le voit dans la (fig. 17) et ne coupe l'axe en aucun point.

Saratoff 1853.

14.

Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung.

(Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.)

---

§. 1.

Wenn die Elemente dreier Determinanten;

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n, \qquad B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \dots b_n^n, \qquad C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \dots c_n^n$$

so mit einander verbunden sind, dafs

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \dots + a_n^\varkappa b_n^\lambda$$

ist, so ist bekanntlich:

$$(1.) \qquad AB = C.$$

Ich werde zeigen, wie die partiellen Differentialquotienten der Determinante C nach ihren Elementen c genommen durch die partiellen Differentialquotienten der Factoren A und B nach ihren Elementen genommen sich ausdrücken lassen.

Zu diesem Zwecke differentiire man die Gleichung (1.) nach $a_p^\varkappa$. Da von den Elementen c nur $c_\varkappa^0, c_\varkappa^1, \dots c_\varkappa^n$ Functionen dieser Gröfse sind, so ergiebt sich:

$$B \cdot \frac{\partial A}{\partial a_p^\varkappa} = \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^0} b_p^0 + \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^1} b_p^1 + \dots \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^n} b_p^n.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $\frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda}$ und addire alle Gleichungen, welche sich aus der angegebenen ergeben, indem man statt p nach einander die Zahlen 0, 1, 2, ... n setzt. Dadurch erhält man:

$$B\Sigma \frac{\partial A}{\partial a_p^\varkappa} \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} = \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^0} \Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^0 + \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^1} \Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^1 + \dots \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^n} \Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^n.$$

Da aber die Summen $\Sigma \frac{\partial B}{\partial b_p^\lambda} b_p^q$ einzeln verschwinden, mit Ausnahme der Summe, in welcher q den Werth λ hat, welche den Werth B annimmt, so erhält

man die Gleichung:

$$(2.)\qquad \frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda} = \frac{\partial A}{\partial a_0^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_0^\lambda} + \frac{\partial A}{\partial a_1^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_1^\lambda} + \cdots \frac{\partial A}{\partial a_n^\varkappa}\frac{\partial B}{\partial b_n^\lambda}.$$

§. 2.

Um die zweiten partiellen Differentialquotienten von C durch die zweiten partiellen Differentialquotienten der Factoren A und B auszudrücken, differentiire man die Gleichung (2.) zuerst nach a_q^μ und dann nach b_q^ν, welches

$$\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} = \frac{\partial^2 A}{\partial a_0^\varkappa \partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_0^\lambda \partial b_q^\nu} + \frac{\partial^2 A}{\partial a_1^\varkappa \partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_1^\lambda \partial b_q^\nu} + \cdots \frac{\partial^2 A}{\partial a_n^\varkappa \partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_n^\lambda \partial b_q^\nu}$$

giebt. Wenn man in dieser Gleichung statt q nach einander die Zahlen $0, 1, \ldots n$ setzt, so entstehen daraus $n+1$ Gleichungen. Addirt man dieselben, so läfst sich die Summe wie folgt bequem darstellen:

$$\Sigma\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} = \Sigma\frac{\partial^2 A}{\partial a_p^\varkappa \partial a_q^\mu}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial b_p^\lambda \partial b_q^\nu};$$

wo für p und q die Zahlen $0, 1, \ldots n$ zu nehmen sind.

Der linkseitige Theil dieser Gleichung läfst sich als eine Function der Elemente c ausdrücken. In der That: differentiirt man $\frac{\partial C}{\partial c_\varkappa^\lambda}$ nach a_q^μ, und berücksichtigt, dafs von den Elementen c nur $c_\mu^0, c_\mu^1, \ldots c_\mu^n$, Functionen von a_q^μ sind, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu} = \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^0} b_q^0 + \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^1} b_q^1 + \cdots \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^n} b_q^n.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach b_q^ν, von welcher Gröfse wieder nur $c_0^\nu, c_1^\nu, \ldots c_n^\nu$ Functionen sind, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} = \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^0 \partial c_0^\nu} a_q^0 b_q^0 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^0 \partial c_1^\nu} a_q^1 b_q^0 + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^0 \partial c_n^\nu} a_q^n b_q^0\right\} \\ &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^1 \partial c_0^\nu} a_q^0 b_q^1 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^1 \partial c_1^\nu} a_q^1 b_q^1 + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^1 \partial c_n^\nu} a_q^n b_q^1\right\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^n \partial c_0^\nu} a_q^0 b_q^n + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^n \partial c_1^\nu} a_q^1 b_q^n + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^n \partial c_n^n} a_q^n b_q^n\right\}.\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung für q die Zahlen $0, 1, \ldots n$ und addirt, so erhält man, mit Berücksichtigung der Gleichung

$$c_\varkappa^\lambda = a_0^\varkappa b_0^\lambda + a_1^\varkappa b_1^\lambda + \cdots a_n^\varkappa b_n^\lambda,$$

folgende Gleichung:

$$\Sigma \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu}$$

$$= (n+1)\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} - \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^0} c_0^0 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^0} c_1^0 + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^0} c_n^0\right\}$$

$$- \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^1} c_0^1 + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^1} c_1^1 + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^1} c_n^1\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \left\{\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^n} c_0^n + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^n} c_1^n + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^n} c_n^n\right\}.$$

Man bemerkt, dafs sich nicht genau diese Gleichung ergiebt, sondern dafs in sämmtlichen dritten Differentialquotienten der Determinante C des rechtseitigen Theiles der Gleichung zwei obere Indices der Elemente c mit einander vertauscht sind, und dafs zugleich das positive Vorzeichen jedes dritten Differentialquotienten von C in das negative verändert ist. Dieses ist aber erlaubt, weil eben die Determinante C ihr Vorzeichen wechselt, wenn man in allen ihren Gliedern zwei obere Indices mit einander vertauscht. Berücksichtigt man nun noch, dafs der Ausdruck:

$$\frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_0^p} c_0^p + \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_1^p} c_1^p + \cdots \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_n^p} c_n^p$$

gleich $\frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu}$ ist, ausgenommen wenn p gleich λ oder ν ist, in welchen Fällen der Ausdruck verschwindet, so stellt sich die zuletzt angegebene Gleichung wie folgt dar:

$$\Sigma \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial a_q^\mu \partial b_q^\nu} = 2 . \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu}.$$

Setzt man diesen Werth der Summe in die eben angegebene Gleichung und dividirt durch 2, so erhält man für den gesuchten Ausdruck des zweiten partiellen Differentialquotienten von C:

$$(3.) \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu} = \frac{1}{1.2} \Sigma \frac{\partial^2 A}{\partial a_p^\varkappa \partial a_q^\mu} . \frac{\partial^2 B}{\partial b_p^\lambda \partial b_q^\nu}.$$

Bestimmt man auf dem angezeigten Wege durch Differentiation dieser Gleichung den dritten Differentialquotienten von C, so ergiebt sich:

$$(4.) \qquad \frac{\partial^3 C}{\partial c_\varkappa^\lambda \partial c_\mu^\nu \partial c_\varrho^\sigma} = \frac{1}{1.2.3} \Sigma \frac{\partial^3 A}{\partial a_p^\varkappa \partial a_q^\mu \partial a_r^\varrho} \frac{\partial^3 B}{\partial b_p^\lambda \partial b_q^\nu \partial b_r^\sigma};$$

woraus das Bildungsgesetz für die höheren Differentialquotienten der Determinante C, nach ihren Elementen genommen, erhellet.

§. 3.

Das Product zweier Determinanten

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

läfst sich bekanntlich wieder auf die Form

$$\begin{vmatrix} u_{11}\alpha_2 - u_{12}\alpha_1 & u_{21}\alpha_2 - u_{22}\alpha_1 \\ u_{11}\gamma_2 - u_{12}\gamma_1 & u_{21}\gamma_2 - u_{22}\gamma_1 \end{vmatrix}$$

einer Determinante bringen.

Multiplicirt man diese Determinante noch einmal mit der ersten Determinante $\begin{vmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix}$, so erhält man, vorausgesetzt, dafs $u_{12} = u_{21}$ ist, eine Determinante $ac - b^2$, deren Componenten folgende Determinanten sind:

$$a = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix},$$

welches die identische Gleichung

$$(5.) \quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}^2 = ac - b^2$$

giebt. Ich werde im Folgenden zeigen, welche Ausdehnung dieser Gleichung gegeben werden kann.

§. 4.

Es bedeute B die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \beta \end{vmatrix},$$

in welcher jedes Element $u_{\varkappa\lambda}$ dem ihm entsprechenden $u_{\lambda\varkappa}$ gleich ist.

Man betrachte nun folgenden, der Determinante $ac - b^2$ des vorhergehenden Paragraphen analog gebildeten Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\alpha_3\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\gamma_3\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\gamma_3\right)^2,$$

welcher sich als Determinante auch so darstellen läfst:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\alpha_3 & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\alpha_1+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\alpha_2+\frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\alpha_3 \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}\gamma_3 & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2+\frac{\partial B}{\partial \alpha_3}\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist der partielle Differentialquotient des Products $MN=C$ zweier Determinanten

$$M=\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad N=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix},$$

nach $c_x^\lambda = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$ genommen. Sie läfst sich also nach der Gleichung (2.) in die Summe von Producten der Differentialquotienten der Factoren wie folgt zerlegen:

$$\frac{\partial M}{\partial m_1}\frac{\partial N}{\partial n_1}+\frac{\partial M}{\partial m_2}\frac{\partial N}{\partial n_2}+\frac{\partial M}{\partial m_3}\frac{\partial N}{\partial n_3}.$$

Um M eine bequeme Form zu geben, bemerke man, dafs

$$M.\frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bringt man dieses Product *zweier* Determinanten auf die bekannte Weise auf die Form *einer* Determinante und bemerkt dabei, dafs

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}u_{11}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}u_{12}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}u_{13}+\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_1 &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}u_{21}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_2}u_{22}+\frac{\partial B}{\partial \gamma_3}u_{23}+\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}u_{11}+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}u_{12}+\frac{\partial B}{\partial \alpha_2}u_{13}+\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_1 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

so stellt sich das Product $M\frac{\partial B}{\partial \beta}$ wie folgt dar:

$$M.\frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_3 \\ -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_3 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+u_{13}m_3 & u_{21}m_1+u_{22}m_2+u_{23}m_3 & u_{31}m_1+u_{32}m_2+u_{33}m_3 \end{vmatrix}$$

und mit Weglassung des gleichen Factors $\frac{\partial B}{\partial \beta}$ auf beiden Seiten der Gleichung erhält man:

$$M = \frac{\partial B}{\partial \beta}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+u_{13}m_3 & u_{21}m_1+u_{22}m_2+u_{23}m_3 & u_{31}m_1+u_{32}m_2+u_{33}m_3 \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun:

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ u_{11}m_1+u_{12}m_2+u_{13}m_3 & u_{21}m_1+u_{22}m_2+u_{23}m_3 & u_{31}m_1+u_{32}m_2+u_{33}m_3 \end{vmatrix},$$

so wird:

$$M = \frac{\partial B}{\partial \beta}\cdot P$$

und wenn man diesen Werth von M in den obigen Ausdruck substituirt, so geht derselbe in

$$\frac{\partial B}{\partial \beta}\left\{\frac{\partial P}{\partial m_1}\frac{\partial N}{\partial n_1}+\frac{\partial P}{\partial m_2}\frac{\partial N}{\partial n_2}+\frac{\partial P}{\partial m_3}\frac{\partial N}{\partial n_3}\right\}$$

über. Dieses Product ist also gleich der betrachteten Determinante, oder es ist:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}.U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix}, \tag{6.}$$

wo U die Bedeutung

$$U = \left\{\frac{\partial P}{\partial m_1}\frac{\partial N}{\partial n_1}+\frac{\partial P}{\partial m_2}\frac{\partial N}{\partial n_2}+\frac{\partial P}{\partial m_3}\frac{\partial N}{\partial n_3}\right.$$

hat. Setzt man in diesen Ausdruck von U die angegebenen Werthe von P und N, so findet sich

$$\begin{aligned} U = {} & u_{11}(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)^2+u_{22}(\alpha_3\gamma_1-\alpha_1\gamma_3)^2+u_{33}(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)^2 \\ & +(u_{23}+u_{32})(\alpha_3\gamma_1-\alpha_1\gamma_3)(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)+(u_{31}+u_{13})(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2) \\ & +(u_{12}+u_{21})(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)(\alpha_3\gamma_1-\alpha_1\gamma_3). \end{aligned} \tag{7.}$$

§. 5.

Es bezeichne B die Determinante:

$$B = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \beta \end{vmatrix},$$

in welcher wie oben $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ angenommen werden soll.

Der der Determinante $ac - b^2$ analog gebildete Ausdruck

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \cdots \frac{\partial B}{\partial \gamma_4}\alpha_4\right)\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \cdots \frac{\partial B}{\partial \alpha_4}\gamma_4\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \cdots \frac{\partial B}{\partial \gamma_4}\gamma_4\right)^2$$

läfst sich als eine Determinante wie folgt darstellen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\alpha_2 + \cdots & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\alpha_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\alpha_2 + \cdots \\ \frac{\partial B}{\partial \gamma_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2}\gamma_2 + \cdots & \frac{\partial B}{\partial \alpha_1}\gamma_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2}\gamma_2 + \cdots \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante läfst sich wieder als der zweite Differentialquotient des Products zweier Determinanten

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_4} \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \end{vmatrix},$$

nach den Elementen

$$c_{\varkappa}^{\lambda} = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3 + m_4\mu_4,$$
$$c_{\mu}^{\nu} = n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + n_3\nu_3 + n_4\nu_4$$

genommen, betrachten. Es läfst sich also diese Determinante nach der Gleichung (3.) in folgende Summe von Producten zerlegen:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial^2 M}{\partial m_p \partial n_q} \cdot \frac{\partial^3 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}.$$

Um die Determinante M zu transformiren, bilde man das Product:

$$M.\frac{\partial B}{\partial \beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial B}{\partial \alpha_4} \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}.$$

Drückt man dieses Product zweier Determinanten als eine Determinante aus und berücksichtiget, dafs

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial \gamma_1} u_{11} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} u_{12} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} u_{13} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} u_{14} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \alpha_1 = 0, \\ &\frac{\partial B}{\partial \gamma_1} u_{21} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_2} u_{22} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_3} u_{23} + \frac{\partial B}{\partial \gamma_4} u_{24} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \alpha_2 = 0, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial B}{\partial \alpha_1} u_{11} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_2} u_{12} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_3} u_{13} + \frac{\partial B}{\partial \alpha_4} u_{14} + \frac{\partial B}{\partial \beta} \gamma_1 = 0, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so erhält man

$$M.\frac{\partial B}{\partial \beta}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_3 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\alpha_4 \\ -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_1 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_2 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_3 & -\frac{\partial B}{\partial \beta}\gamma_4 \\ u_{11}m_1 + u_{12}m_2 + \cdots & u_{21}m_1 + u_{22}m_2 + \cdots & u_{31}m_1 + u_{32}m_2 + \cdots & u_{41}m_1 + u_{42}m_2 + \cdots \\ u_{11}n_1 + u_{12}n_2 + \cdots & u_{21}n_1 + u_{22}n_2 + \cdots & u_{31}n_1 + u_{32}n_2 + \cdots & u_{41}n_1 + u_{42}n_2 + \cdots \end{vmatrix}.$$

Setzt man daher der Kürze wegen:

$$P = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ u_{11}m_1 + u_{12}m_2 + \cdots & u_{21}m_1 + u_{22}m_2 + \cdots & u_{31}m_1 + u_{32}m_2 + \cdots & u_{41}m_1 + u_{42}m_2 + \cdots \\ u_{11}n_1 + u_{12}n_2 + \cdots & u_{21}n_1 + u_{22}n_2 + \cdots & u_{31}n_1 + u_{32}n_2 + \cdots & u_{41}n_1 + u_{42}n_2 + \cdots \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

$$M = P.\frac{\partial B}{\partial \beta}.$$

Die für die betrachtete Determinante gefundene Summe geht nun, wenn man den oben angegebenen Werth von M substituirt, in

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial \beta}\,\Sigma\frac{\partial^2 P}{\partial m_p \partial n_q}\cdot\frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}$$

über. Setzt man endlich diese Summe gleich der betrachteten Determinante, so erhält man die identische Gleichung:

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} . U$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \gamma_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \gamma_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix}^2 ,$$

in welcher U die Summe

$$U = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial^2 P}{\partial m_p \partial n_q}\cdot\frac{\partial^2 N}{\partial \mu_p \partial \nu_q}$$

bedeutet und p und q die Zahlen 1, 2, 3, 4 sind. Diese Summe, eine ganze homogene Function 2ten Grades, sowohl in Rücksicht auf die Gröfsen α als γ und u, läfst sich leicht berechnen. Sie hat aber zu viele Glieder, um sie berechnet hinzuschreiben.

Auf dem angegebenen Wege läfst sich auch, unter der Voraussetzung dafs $u_{x\lambda} = u_{\lambda x}$ sei, die allgemeine Gleichung:

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} . U$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix}^2$$

ableiten, wo U eine ganze homogene Function 2ten Grades sowohl in Rücksicht auf die Gröfsen α als auf β und vom $n-2$ten Grade in Rücksicht auf die Gröfsen u ist.

§. 6.

Jede *symmetrische* Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix},$$

das heifst jede Determinante, in welcher $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$ ist, läfst sich durch Multiplication mit dem Quadrat einer beliebigen andern Determinante wieder auf eine *symmetrische* Determinante bringen. In der That multiplicirt man die angegebene Determinante mit folgender:

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

und setzt, zur Abkürzung

$$2F(x_1 x_2 \dots x_n) = u_{11} x_1 x_1 + u_{22} x_2 x_2 + \cdots 2u_{12} x_1 x_2 + \cdots,$$

so erhält man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} F'(x_1') & F'(x_2') & \dots & F'(x_n') \\ F'(x_1'') & F'(x_2'') & \dots & F'(x_n'') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F'(x_1^n) & F'(x_2^n) & \dots & F'(x_n^n) \end{vmatrix},$$

in welcher $F'(x_p^q)$ den partiellen Differentialquotienten von $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ nach x_p bedeutet mit den Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, welchen der obere Index q zugetheilt ist. Multiplicirt man diese Determinante nochmals mit der vorhergehenden und setzt:

$$F_{pq} = x_1^p F'(x_1^q) + x_2^p F'(x_2^q) + \cdots x_n^p F'(x_n^q),$$

so erhält man:

$$(10.) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}.$$

Da aber $F_{pq} = F_{qp}$ ist, so ist die letzte Determinante wieder *symmetrisch*.

Auf dieselbe Art läfst sich die identische Gleichung:

$$(11.)\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \dots & x_n' & 0 \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} & A_1 \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} & A_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} & A_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n & 0 \end{vmatrix}$$

beweisen, wo $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ die Bedeutung

$$A_\varkappa = x_1^\varkappa \alpha_1 + x_2^\varkappa \alpha_2 + \cdots x_n^\varkappa \alpha_n,$$
$$C_\varkappa = x_1^\varkappa \gamma_1 + x_2^\varkappa \gamma_2 + \cdots x_n^\varkappa \gamma_n$$

haben.

§. 7.

Aus der identischen Gleichung (9.) von der Form:

$$(12.)\quad \Delta . U = ac - b^2$$

lassen sich für die *Geometrie* wichtige Resultate ziehen. Wenn man nämlich die Gröfsen $u_{\varkappa\lambda}$ lineäre Ausdrücke zweier Variabeln sein läfst, so stellen die Gleichungen:

$$\Delta = 0, \quad U = 0, \quad a = 0, \quad c = 0, \quad b = 0$$

ebene *Curven* respective von der $n$ten, $n-2$ten und die drei letzten Gleichungen Curven von der $n-1$ten Ordnung dar, welche zu einander in merkwürdiger Beziehung stehen. Denn da, wie aus der Gleichung (12.) erhellet, b^2 verschwindet, wenn Δ und a verschwinden, so geht die Curve $b^2 = 0$ durch die $n(n-1)$ Schnittpuncte der Curven $\Delta = 0$ und $a = 0$ hindurch. Die Gleichung $b = 0$ hat, weil sie von der $n-1$ten Ordnung ist, $\frac{1}{2}n(n+1)$ Constanten. Wendet man von denselben $\frac{1}{2}n(n-1)$ Constanten dazu an, die Curve $b = 0$ durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpuncte der Curven $\Delta = 0$ und $a = 0$ hindurchgehen zu lassen, so bleiben noch n unbestimmte Constanten übrig. In der That enthält die Gleichung $b = 0$ noch n willkürliche Constanten γ, welche weder in Δ noch in a vorkommen. Daher kann die Curve $b = 0$ nicht durch alle $n(n-1)$ Schnittpuncte der Curven $\Delta = 0$ und $a = 0$ hindurchgehen, sondern nur durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ dieser Schnittpuncte. Wenn nun die Curve $b^2 = 0$ dennoch durch alle $n(n-1)$ Schnittpuncte gehen soll, so ist dies nicht anders möglich, als dafs von den $n(n-1)$ Schnittpuncten je zwei in einen zusammenfallen. Die Curve $\Delta = 0$ wird also in $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Puncten von der Curve $a = 0$ *berührt*. Dieselbe Curve wird

ebenso auch von der Curve $c=0$ *berührt.* Die Curve $b=0$ geht endlich durch alle diese $n(n-1)$ Berührungspuncte hindurch.

Ebenso zeigt sich, dafs die Curve $U=0$ von jeder der Curven $a=0$ und $c=0$ in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedenen Puncten berührt wird, durch welche die Curve $b=0$ hindurchgeht.

Die Gleichung $a=0$, mit den n willkürlichen Constanten α, stellt ein ganzes System Curven $n-1$ter Ordnung vor, deren jede die Curve $n$ter Ordnung $\Delta=0$ in $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Puncten berührt. Von diesen Berührungspuncten können $n-1$ Puncte auf der Curve $\Delta=0$ beliebig angenommen werden, während die übrigen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Berührungspuncte durch die angenommenen bestimmt werden. In der That, da die Gleichung $a=0$ n willkürliche Constanten α in lineärer Weise enthält, von denen eine durch Division zur Einheit gemacht werden kann, so lassen sich die übrigen $n-1$ Constanten so bestimmen, dafs die Curve $a=0$ durch $n-1$ auf der Curve $\Delta=0$ beliebig angenommene Puncte hindurchgeht.

Um die obigen Bemerkungen über die Curve $\Delta=0$ auf alle Curven $n$ter Ordnung ausdehnen zu können, ist noch nachzuweisen, dafs sich die Gleichung einer beliebigen Curve $v=0$, $n$ter Ordnung, immer auf die Form $\Delta=0$ bringen lasse. Dieses ist in der That immer möglich, weil die Zahl der Constanten in der Determinante Δ gröfser ist als die Zahl der Glieder in v. Da nämlich die symmetrische Determinante Δ aus $\frac{1}{2}n(n+1)$ verschiedenen Elementen besteht, von denen jedes drei Constanten enthält, so wird Δ im Ganzen $\frac{3}{2}n(n+1)$ Constanten enthalten, während v nur $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Glieder hat.

Diese Bemerkungen lassen sich in folgendem Lehrsatze zusammenfassen:

Durch $n-1$, ***beliebig auf einer gegebenen Curve*** n***ter Ordnung angenommene Puncte läfst sich immer eine Curve*** a $n-1$***ter Ordnung hindurchlegen, welche die gegebene Curve in den genannten*** $n-1$ ***Puncten und in noch*** $\frac{1}{2}(n-1).(n-2)$ ***andern durch die ersteren bestimmten Puncte berührt. Legt man durch alle diese*** $\frac{1}{2}n(n-1)$ ***Berührungspuncte eine beliebige andere Curve*** b ***von der*** $n-1$***ten Ordnung hindurch, so schneidet dieselben die gegebene Curve in noch*** $\frac{1}{2}n(n-1)$ ***Puncten, in welchen ebenfalls eine Curve*** c ***von der*** $n-1$***ten Ordnung die gegebene Curve berührt.***

(Dieser Lehrsatz ist hier nur für den Fall bewiesen, wenn die Gleichung der Berührungscurve a sich auf die Form der oben angegebenen

Gleichung $a = 0$ zurückführen läfst. Schon bei den Curven 4ter Ordnung treten auch Berührungscurven auf, bei welcher das letztere nicht angeht. Diese Curven verlangen eine andere Behandlung.)

Mit der Curve b variirt zugleich auch die Berührungscurve c. Aus der letzteren geht also, wenn man b um die Berührungspuncte von a variiren läfst, ein ganzes System die gegebene Curve berührender Curven hervor, deren je zwei die gegebene Curve in solchen Puncten berühren, durch welche sich eine Curve $n-1$ter Ordnung hindurchlegen läfst. Diese letztere Eigenschaft dient als Criterium, ob zwei beliebige Berührungscurven demselben Systeme oder verschiedenen Systemen angehören.

Offenbar wird eine gegebene Curve $v = 0$ $n$ter Ordnung so viele verschiedene Systeme Berührungscurven haben, als oft sich der Ausdruck v auf die Form einer *symmetrischen* Determinante Δ bringen läfst. Hiernach scheint es, dafs unendlich viele Systeme von Berührungscurven der gegebenen Curve $v = 0$ existiren. Denn hat man v auf die Form einer symmetrischen Determinante gebracht, so kann man letztere, wie es die Gleichung (10.) beweiset, durch Multiplication mit dem Quadrate einer beliebigen Determinante, wieder auf eine symmetrische Determinante bringen. Dem ist aber nicht so. Die Gleichungen der Berührungscurven, welche sich aus den beiden Determinanten ergeben, sind, wie die Gleichung (11.) zeigt, nur durch einen constanten Factor von einander verschieden. Man darf daher eine symmetrische Determinante Δ, die durch Multiplication einer anderen symmetrischen Determinante mit dem Quadrat einer Determinante hervorgegangen ist, nicht als eine davon verschiedene betrachten.

In diesem Sinne läfst sich, wenn $v = 0$ einen *Kegelschnitt* darstellt, *v nur auf eine Art* auf die Form einer symmetrischen Determinante bringen. ***Daher hat ein Kegelschnitt nur ein einziges System Tangenten.***

Wenn $v = 0$ die Gleichung einer Curve *dritter* Ordnung ist, so läfst sich v auf drei verschiedene Arten auf die Form einer symmetrischen Determinante bringen, d. h. es giebt, wie ich im 36ten Bande dieses Journals S. 143 auseinandergesetzt habe, drei verschiedene homogene Functionen dritter Ordnung, deren Determinanten jede gleich einer gegebenen homogenen Function 3ter Ordnung ist. Daraus folgt der (Bd. 36, S. 166) bewiesene Lehrsatz: ***Eine Curve dritter Ordnung hat 3 Systeme Berührungskegelschnitte.***

§. 8.

Es ist mir der Beweis gelungen, dafs sich eine gegebene Function zweier Variabeln 4ten Grades auf 36 verschiedene Arten auf die Form einer symmetrischen Determinante Δ zurückführen läfst. Hieraus ziehe ich den Schlufs:

Dafs eine gegebene Curve 4ter Ordnung 36 Systeme Berührungscurven 3ter Ordnung hat, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung in 6 verschiedenen Puncten berühren.

Von diesen 6 Berührungspuncten können 3 Puncte willkürlich auf der gegebenen Curve 4ter Ordnung angenommen werden. Die drei andern sind durch die ersteren bestimmt und zwar auf 36 verschiedene Arten.

Aus dem obigen allgemeinen Satze folgt für die Curven 4ter Ordnung:

Dafs, wenn man durch die 6 Berührungspuncte einer Berührungscurve 3ter Ordnung und einer gegebenen Curve 4ter Ordnung eine beliebige Curve 3ter Ordnung hindurchlegt, dieselbe die gegebene Curve in noch 6 Puncten schneidet, in welcher eine andere, demselben Systeme angehörige Berührungscurve die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.

Da die Gleichung $a = 0$ der Berührungscurve in dem vorliegenden Falle, wo $n = 4$ ist, 4 willkürliche Constanten α hat, von denen eine durch Division der Einheit gleich gemacht werden kann, so zeigt sich, dafs die drei andern sich so bestimmen lassen, dafs a in drei lineäre Factoren zerfällt. Ich habe gefunden, dafs diese Bestimmung auf 56 Arten möglich ist und dafs sie durch Auflösung einer Gleichung 8ten Grades erreicht wird. Setzt man die lineären Factoren von a einzeln gleich 0, so hat man die Gleichungen von Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung. Man sieht hieraus, dafs auf diese Weise jede Doppeltangente 6 mal sich ergiebt, da die Curve 4ter Ordnung bekanntlich 28 Doppeltangenten hat.

Wenn in der identischen Gleichung (2.), in welcher, $n = 4$ angenommen, ..., a dreien Doppeltangenten entspricht, c ebenfalls dreien anderen Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung entspricht, so hat man eine Curve $b = 0$ dritter Ordnung, welche durch die Berührungspuncte jener 6 Doppeltangenten hindurchgeht. Solcher Curven dritter Ordnung, $b = 0$, finde ich, unter der Voraussetzung, dafs unter den 6 Doppeltangenten nicht drei sind, deren Berührungspuncte in einem Kegelschnitt liegen, der einen Determinante Δ entsprechend, 280. Da aber der gegebenen Curve 4ter Ord-

nung 36 verschiedene Determinanten Δ entsprechen, so erhält man 280.36 solcher Curven dritter Ordnung. Von diesen Curven 3ter Ordnung ist indefs jede 10 mal gezählt, weil die genannten 6 Doppeltangenten sich auf 10 verschiedene Arten in zwei Gruppen zu dreien vertheilen lassen.

Demnach bietet eine Curve 4ter Ordnung 1008 verschiedene Curven dritter Ordnung dar, von denen jede durch solche 6 Paare Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten hindurchgeht, von welchen nicht drei Paare gefunden werden können, welche in einem Kegelschnitte liegen.

Die genauere Bezeichnung der 6 Doppeltangenten in diesem Lehrsatze ist wesentlich, weil es auch *solche* 6 Doppeltangenten giebt, durch deren Berührungspuncte sich zwei Kegelschnitte legen lassen; und zugleich eine Curve 3ter Ordnung, von welcher in dem folgenden Paragraphen die Rede sein wird.

§. 9.

Die Curven dritter Ordnung $a=0$, welche eine gegebene Curve 4ter Ordnung in 6 verschiedenen Puncten berühren und von welchen der vorhergehende Paragraph handelte, haben die Eigenschaft, die Curve 4ter Ordnung in 6 Puncten zu berühren, welche nicht in einem Kegelschnitt liegen.

Es giebt aber aufser den genannten 36 Systemen Berührungscurven dritter Ordnung noch 28 andere Systeme Berührungscurven dritter Ordnung, von welchen jede Curve die gegebene Curve 4ter Ordnung in 6 Puncten berührt, welche in einem Kegelschnitt liegen.

Zu diesen Curven gelangt man durch die Betrachtung der identischen Gleichung (5.), welche, wenn man $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\gamma_1=1$, $\gamma_2=m$ setzt, in

$$(13.) \qquad \Delta = ac-b^2$$

übergeht. In dieser Gleichung ist:

$$\Delta = u_{11}u_{12}-u_{12}^2, \quad -a=u_{11}, \quad -b=u_{12}-u_{11}m,$$
$$-c=u_{22}-2u_{12}m+u_{11}m^2.$$

Nimmt man nun an, dafs u_{11}, u_{12}, u_{22} gegebene Ausdrücke zweier Coordinaten bedeuten, respective von der 1ten, 2ten und 3ten Ordnung, und läfst m einen veränderlichen lineären Ausdruck jener Coordinaten vorstellen, so hat man folgende Gleichungen von Curven 1ter, 2ter, 3ter und 4ter Ordnung:

$$a=0, \quad b=0, \quad c=0, \quad \Delta=0,$$

welche auf eine merkwürdige Weise mit einander verbunden sind. Die erste

dieser Curven a ist, wie aus der identischen Gleichung (13.) zu ersehen, eine Doppeltangente der Curve *4ter Ordnung* Δ. Die zweite b ist ein *Kegelschnitt*, welcher durch die Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgeht, und die dritte c ist eine Curve *dritter Ordnung*, welche die Curve Δ in den übrigen 6 Puncten berührt, in welchen der Kegelschnitt b die Curve Δ schneidet. Der Kegelschnitt b ist ein beliebiger durch die Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgehender Kegelschnitt, weil der Ausdruck b drei in m vorkommende Constanten enthält. Da sich nun die Gleichung jeder Curve 4ter Ordnung auf die Form $\Delta = 0$ bringen läfst, wie durch Abzählung der Constanten in der gegebenen und der transformirten Gleichung zu sehen, so läfst sich aus der identischen Gleichung (13.) folgender Lehrsatz ablesen:

> ***Wenn man durch die Berührungspuncte der Doppeltangente einer gegebenen Curve 4ter Ordnung einen beliebigen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die gegebene Curve in den 6 Puncten, in welchen eine Curve dritter Ordnung die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.***

Von diesen 6 Berührungspuncten können 3 auf der gegebenen Curve 4ter Ordnung beliebig angenommen werden, weil sich immer ein Kegelschnitt angeben läfst, der durch die 3 auf der Curve 4ter Ordnung beliebig angenommenen Puncte und die beiden Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgeht. Die drei anderen Berührungspuncte werden durch die drei angenommenen bestimmt.

Die Gleichung $c = 0$, mit den drei willkürlichen Constanten des lineären Ausdruckes m, stellt ein ganzes System Berührungscurven dritter Ordnung dar, welche ein und derselben Doppeltangente der gegebenen Curve 4ter Ordnung in der Weise entsprechen, dafs die Berührungspuncte jeder Curve des Systems auf einem Kegelschnitt liegen, der durch die Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgeht.

Die gegebene Curve 4ter Ordnung hat 28 Doppeltangenten. Daher wird die Gleichung der gegebenen Curve 28 mal auf die Form $\Delta = 0$ gebracht werden können und jeder dieser Formen wird ein System Berührungscurven von der bezeichneten Art entsprechen. Jedes dieser 28 Systeme Berührungscurven enthält also eine Berührungscurve, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung in drei gegebenen Puncten berührt.

Durch Veränderung von m in m' geht b in b' und c in c' über, wodurch man aus (13.)

$$(14.) \quad \Delta = ac' - b'^2$$

erhält. Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so findet sich die identische Gleichung

$$0 = a(c - c') - (b + b')(b - b'),$$

aus welcher zu sehen ist, dafs a ein Factor von $b + b'$ oder von $b - b'$ sein mufs. Da es gleichgültig ist, welche von diesen Gröfsen das Product von a und einem anderen lineären Factor A ist, so kann man

$$(15.) \quad b - b' = aA$$

setzen und erhält, mit Berücksichtigung dieser Gleichung, aus der vorhergehenden:

$$0 = (c - c') - A(b + b'),$$

welche identische Gleichung ausdrückt, dafs zwei Berührungscurven dritter Ordnung c und c' desselben Systems sich in 9 Puncten schneiden, von denen 6 in einem Kegelschnitt und die 3 andern in einer geraden Linie liegen.

Bezeichnet man den Ausdruck dritter Ordnung $c - Ab$ durch d, so erhält man nach der letzten identischen Gleichung:

$$(16.) \quad d = c - Ab = c' + Ab',$$

woraus

$$(c - Ab)(c' + Ab') = d^2$$

folgt, und hieraus wird

$$cc' - d^2 = A(bc' - b'c + Abb').$$

Der Theil dieser Gleichung rechts ist aber gleich ΔA^2, wie leicht zu sehen, wenn man die mit b multiplicirte Gleichung (14.) von der mit b' multiplicirten Gleichung (13.) abzieht und die Gleichung (15.) zu Hülfe nimmt. Demnach haben wir die identische Gleichung

$$(17.) \quad \Delta A^2 = cc' - d^2.$$

Diese Gleichung beweiset, dafs die 12 Berührungspuncte der beiden Berührungscurven $c = 0$ und $c' = 0$ desselben Systemes wieder auf einer Curve dritter Ordnung $d = 0$ liegen. Da d, wie aus (16.) zu sehen, drei willkürliche in m' vorkommende Constanten behält, wenn man c und b als gegeben annimmt, so läfst sich sagen, dafs die Gleichung $d = 0$ jede durch die Berührungspuncte der Curven $\Delta = 0$ und $c = 0$ gelegte Curve dritter Ordnung darstellt. Der vorhin ausgesprochene Lehrsatz läfst sich demnach wie folgt erweitern:

Wenn man durch die Berührungspuncte einer Doppeltangente einer gegebenen Curve 4ter Ordnung einen Kegelschnitt legt, so

schneidet derselbe die Curve in noch 6 Puncten, in welchen eine Curve dritter Ordnung die gegebene Curve berührt. Legt man durch diese 6 Berührungspuncte eine beliebige Curve dritter Ordnung hindurch, so schneidet dieselbe die gegebene Curve 4ter Ordnung in noch 6 Puncten, in welchen wiederum eine Curve dritter Ordnung, aus demselben Systeme, die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.

Zwei Berührungscurven gehören demnach demselben Systeme an, wenn sich durch die 12 Berührungspuncte derselben mit der gegebenen Curve vierter Ordnung eine Curve dritter Ordnung hindurchlegen läfst.

Die drei in c vorkommenden unbestimmten Constanten lassen sich auf 45 verschiedene Arten so bestimmen, dafs c in drei lineäre Factoren zerfällt. Jeder dieser Factoren gleich 0 gesetzt, drückt analytisch eine von den Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung aus, mit Ausschlufs der Doppeltangente a. Demnach erhält man jede der 27 andern Doppeltangenten auf diese Weise 5 mal.

Wenn in der identischen Gleichung (17.) c dreien Doppeltangenten entspricht und c' ebenfalls dreien andern Doppeltangenten, so hat man eine Curve $d = 0$ dritter Ordnung, welche durch die 12 Berührungspuncte jener 6 Doppeltangenten hindurchgeht. Wir wollen nun untersuchen, wieviele solcher Curven d dritter Ordnung eine gegebene Curve 4ter Ordnung darbietet.

Nimmt man zu diesem Ende aus den 45 genannten Gruppen Doppeltangenten eine Gruppe c heraus, so läfst sich dieselbe nicht mit jeder der übrigen 44 Gruppen c' combiniren, weil unter diesen 4 Gruppen c' enthalten sind, welche die erste in c vorkommende Doppeltangente involviren. Ebenso werden 4 andere Gruppen c' die zweite Doppeltangente in c und noch 4 andere die dritte Doppeltangente in c enthalten. Mit diesen 12 Gruppen wird c nicht zu combiniren sein. Man wird also c nur mit 32 Gruppen c' zu combiniren haben, und jeder dieser Combinationen wird eine andere Curve d entsprechen. Da aber 45 Gruppen c existiren, so ist die doppelte Zahl der gesuchten Combinationen $= 32.45$. Mithin ist die Zahl der verschiedenen Curven d, welche der einen Doppeltangente a entsprechen, $= 720$. Die Zahl sämmtlicher Curven $d = 0$, welche die Curve 4ter Ordnung aufzuweisen hat, ist mithin $720.28 = 20160$, weil die Curve 4ter Ordnung 28 Dopeltangenten hat. Jede Curve d ist hier aber vier mal gezählt, weil sie nicht einer einzigen Doppeltangente a entspricht, sondern vieren. Deshalb mufs jene Zahl noch durch 4 dividirt werden. Man kann also sagen:

Eine gegebene Curve vierter Ordnung hat 5040 verschiedene Curven dritter Ordnung aufzuweisen, von denen jede durch solche 6 Paare Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten hindurchgeht, von denen 3 Paare auf einem Kegelschnitt liegen und die 3 anderen auf einem anderen Kegelschnitt.

§. 10.

Aus der identischen Gleichung (5.) von der Form:

$$\Delta U = ac - b^2$$

lassen sich, in dem Falle, wenn u_{11}, u_{12}, u_{22} Functionen 2ten Grades von zwei Coordinaten bedeuten, für die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, auf welche Form sich die Gleichung jeder Curve 4ter Ordnung zurückführen läfst, andere wichtige Resultate ziehen.

Es wird leicht zu sehen sein, dafs die Gleichung $a = 0$, mit den beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2, welche nur die Stelle von einer Constanten vertreten, wenn man diese Constante variiren läfst, ein ganzes System von Kegelschnitten repräsentirt, deren jeder die gegebene Curve Δ in 4 verschiedenen Puncten berührt. Von diesen 4 Berührungspuncten läfst sich nun ein Berührungspunct willkürlich auf der gegebenen Curve annehmen, weil die Gleichung $a = 0$ nur eine willkürliche Constante enthält. Die drei andern sind durch diesen einen für das in Rede stehende System Berührungskegelschnitte bestimmt. Ich werde später zeigen, ***dafs eine gegebene Curve 4ter Ordnung 63 Systeme Berührungskegelschnitte hat.*** Dieses vorausgesetzt, folgt, dafs sich ein gegebener Ausdruck 4ter Ordnung von zwei Variabeln 63 mal auf die Form Δ zurückführen läfst. Jedes dieser Systeme enthält einen Berührungskegelschnitt, welcher die gegebene Curve in einem gegebenen Puncte berührt, so dafs es also 63 verschiedene Berührungskegelschnitte giebt, welche die gegebene Curve in einem gegebenen Puncte berührt.

Durch die 8 Berührungspuncte zweier Berührungskegelschnitte $a = 0$ und $c = 0$ geht wieder ein Kegelschnitt $b = 0$ hindurch. Betrachtet man den ersten Kegelschnitt als gegeben, den zweiten als variabel, so variirt auch der dritte, indem er immer durch die Berührungspuncte des ersten Kegelschnittes hindurchgeht. Dieses giebt folgenden Lehrsatz:

Wenn man durch die 4 Berührungspuncte eines Berührungskegelschnitts einer gegebenen Curve 4ter Ordnung einen anderen Kegelschnitt legt, so schneidet derselbe die gegebene Curve 4ter Ord-

nung in noch 4 Puncten, in welchen ein zweiter, demselben Systeme zugehöriger Kegelschnitt die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.

Es ist noch hinzuzufügen, dafs zwei Berührungskegelschnitte einem und demselben Systeme angehören, wenn sich durch die 8 Berührungspuncte ein Kegelschnitt hindurchlegen läfst.

Unter den Berührungskegelschnitten $a = 0$ giebt es auch Linienpaare, welche zugleich Doppeltangentenpaare der gegebenen Curve 4ter Ordnung sind. In der That: da die Gleichung $a = 0$ eine willkürliche Constante enthält, so läfst sich dieselbe immer so bestimmen, dafs sie der Bedingungsgleichung genügt, welche erfüllt werden mufs, wenn a in lineäre Factoren zerfallen soll. Diese Factoren einzeln gleich 0 gesetzt, werden Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung darstellen. Erwägt man aber, dafs die genannte Bedingungsgleichung vom dritten Grade ist, in Rücksicht auf die Coëfficienten in a, und dafs die Coëfficienten selber quadratische Ausdrücke der willkürlichen Constante sind, so sieht man, dafs die Bedingungsgleichung in Rücksicht auf die zu bestimmende Constante zu einer Gleichung 6ten Grades wird. Demnach enthält jedes System Berührungskegelschnitte 6 Paare Doppeltangenten der betrachteten Curve 4ter Ordnung. Die 28 Doppeltangenten der gegebenen Curve paaren sich aber 378 mal. Je 6 Paare gehören einem Systeme an. Es müssen also $\frac{378}{6} = 63$ Systeme Berührungskegelschnitte existiren; was zu beweisen war.

Wenn zwei von den Berührungspuncten des Kegelschnitts a zusammenfallen, so berührt dieser Kegelschnitt die gegebene Curve 4ter Ordnung in diesem Puncte 4punctig, und aufserdem noch in 2 andern Puncten. Diese 4punctigen Berührungspuncte erhält man auf folgende Weise. Man betrachte die 4 Berührungspuncte des Kegelschnittes a als die Ecken eines Vierecks und construire die drei Diagonalpuncte p, in welchen sich die drei Linienpaare schneiden, welche durch die Ecken des Vierecks gelegt werden können. Diese 3 Diagonalpuncte beschreiben nun eine Curve dritter Ordnung π, wenn der Berührungskegelschnitt a variirt; und die Schnittpuncte der Curve dritter Ordnung π mit der gegebenen Curve 4ter Ordnung sind die gesuchten 4punctigen Berührungspuncte. In der That: betrachtet man a, b, c als homogene Ausdrücke der 3 Coordinaten x, y, z, wo $z = 1$, so hat man, wenn x, y, z die Coordinaten des Puncts p bedeuten, die Gleichungen

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \lambda \frac{\partial c}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} + \lambda \frac{\partial c}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial a}{\partial z} + \lambda \frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

durch welche auch die folgende Gleichung erfüllt wird:

$$\pi = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

welche Gleichung eben die gesuchte Curve dritter Ordnung darstellt. Wenn nun zwei der Berührungspuncte des Kegelschnitts a in einen Punct zusammenfallen, so fallen auch zwei Diagonalpuncte p in diesem Puncte zusammen und die Curve π mufs in diesem Puncte die Curve 4ter Ordnung schneiden. Man kann also sagen:

Jedes System Berührungskegelschnitte enthält 12 Kegelschnitte, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung 4punctig berühren und diese 4punctigen Berührungspuncte liegen in einer Curve dritter Ordnung.

§. 11.

Man betrachte zwei Berührungskegelschnitte a und c desselben Systemes, von denen die erste in das Doppeltangentenpaar a' und a'' zerfällt, der zweite in das Doppeltangentenpaar c', c''. Durch die 8 Berührungspuncte dieser beiden Doppeltangentenpaare geht, wie man sahe, ein Kegelschnitt b hindurch. Das in Rede stehende System Berührungskegelschnitte bietet nur 6 Paare Doppeltangenten dar. Daher giebt es in diesem Systeme 15 Kegelschnitte b, welche durch die 8 Berührungspuncte von je 2 Paaren Doppeltangenten hindurchgehen. Die 63 Systeme enthalten also $15.63 = 945$ solcher Kegelschnitte b. Von diesen Kegelschnitten ist aber jeder drei mal gezählt worden. Denn erstens gehört der Kegelschnitt b, welcher durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten $a'a''$, $c'c''$ hindurchgelegt ist, dem Systeme an, welches die Berührungskegelschnitte $a'a''$ und $c'c''$ enthält; zweitens dem Systeme, welches die Berührungskegelschnitte $a'c'$ und $a''c''$ enthält; endlich drittens dem Systeme, welches die Berührungskegelschnitte $a'c''$ und $a''c'$ enthält.

Demnach ist die Zahl der Kegelschnitte, welche durch 8 Berührungspuncte von 4 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung gelegt werden können gleich $\frac{945}{3} = 315$.

(In dem vortrefflichen Werke „Treatise on the higher plane curves by *George Salmon*, M. A. Dublin 1852," in welchem der Verfasser die in dem Gebiete der höheren Curven gemachten Entdeckungen, vermehrt durch eigene Untersuchungen, vorträgt, findet man den genannten Lehrsatz S. 197 bewiesen und S. 198 die 315 Combinationen der Doppeltangenten, durch deren Berührungspuncte sich ein Kegelschnitt hindurchlegen läfst, in einer Tafel zusammengestellt. Meine Angaben werden in dieser Tafel ihre Bestätigung finden. Den Beweis derselben behalte ich mir für eine spätere Abhandlung über die Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung vor, welche manche andere in dieser Abhandlung ohne Beweis hingeworfenen Angaben aufklären wird. Herr *Salmon* giebt S. 199 7 Kegelschnitte an, welche durch die 56 Berührungspuncte der Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung hindurchgehen. Es sind dieses dieselben Kegelschnitte, welche mir in dem Schreiben an den Professor *Jacobi* (S. dieses Journ. Bd. 40 p. 260) vorschwebten. Bei dieser Gelegenheit will ich noch bemerken, dafs drei von den 7 Kegelschnitten auch durch 2 Curven dritter Ordnung und von den noch übrigen 4 Kegelschnitten ebenfalls 3 durch 2 Curven dritter Ordnung sich ersetzen lassen, so dafs erstens 7 Kegelschnitte durch die 56 Berührungspuncte der Doppeltangenten hindurchgehen, zweitens 4 Kegelschnitte und eine Curve dritter Ordnung, drittens 1 Kegelschnitt und 4 Curven dritter Ordnung.)

Es läfst sich auch angeben, welche Doppeltangenten die Curve 4ter Ordnung in 8 Puncten berühren, die in einem Kegelschnitt liegen. Zu diesem Zwecke bediene ich mich folgender Hülfsfigur. Durch 8 Puncte des Raumes ziehe ich die 28 geraden Linien, welche je 2 von den 8 Puncten verbinden. Jede dieser geraden Linien lasse ich einer der 28 Doppeltangenten entsprechen. Den Seiten jedes räumlichen Vierecks der Hülfsfigur entsprechen dann solche 4 Doppeltangenten, deren Berührungspuncte in einem Kegelschnitt liegen. Solcher Kegelschnitte finden sich 210. Ferner entsprechen jeden 4 geraden Linien, welche die 8 Puncte auf die Weise verbinden, dafs jede Linie durch 2 verschiedene Puncte hindurchgeht, ebenfalls 4 Doppeltangenten, deren Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt liegen. Solcher Kegelschnitte giebt es 105. So mag es scheinen, als wenn die 315 Kegslschnitte in zwei Gruppen von 210 und 105 Kegelschnitten zerfallen, welche durch besondere Eigenschaften sich von einander unterscheiden. Dem ist aber nicht so. Es haben vielmehr die 315 Kegelschnitte für die gegebene Curve 4ter Ordnung ganz dieselbe Bedeutung.

Königsberg, im April 1853.

15.

Eigenschaften der Curven vierten Grads rücksichtlich ihrer Doppeltangenten. †)

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

Seitdem ***Poncelet*** zuerst auf das Vorhandensein der Doppeltangenten bei algebraischen Curven aufmerksam gemacht *), ist bis jetzt noch wenig geschehen, die wesentlichsten Eigenschaften derselben zu erforschen. Es gelang leicht, ihre Zahl aus derjenigen der Wendepuncte zu schliefsen, durch Hülfe der Theorie der reciproken Polaren, welche man demselben grofsen Geometer verdankt. In diesem Betracht habe ich die drei Gleichungen aufgestellt, welche zwischen dem Grad, der Classe, der Zahl der Doppel- und Rückkehrpuncte, und der Zahl der Doppel- und Wendetangenten jeder algebraischen Curve statt finden **). Nicht ohne Anstrengung gelang es ***Jacobi*** die Zahl der Doppeltangenten ***direct*** und analytisch zu beweisen ***). Noch schwerer mag es sein, die allgemeinen Eigenschaften derselben zu erforschen, was diejenigen Mathematiker am besten wissen werden, welche sich bereits damit beschäftigt haben. Ich habe vor mehren Jahren versucht auf synthetischem Wege die gegenseitige Beziehung der 28 Doppeltangenten der allgemeinen Curve 4ten Grads zu finden, und bin zu Resultaten gelangt, welche sowohl den Grund der dem Gegenstande inwohnenden Schwierigkeit aufdecken, als auch zugleich die geeigneten Angriffspuncte für die zweckmäfsige Behandlung desselben leicht erkennen lassen. Die Resultate beruhen auf eigenthümlich verschlungenen, theils ungewöhnlichen Combinationen der gegebenen Elemente. Die wenigen von Andern über denselben Gegenstand bereits veröffentlichten

---

†) Einen kurzen Auszug dieses Aufsatzes habe ich bereits am 25. Juli 1853 der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorgelegt; S. Comptes rendus hebdomadaires von jenem Datum.

*) *Crelle's* Journal f. d. Mathem. Bd. VIII, S. 401—406.

**) Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1848; und *Crelle's* Journal Bd. XLVII, S. 1.

***) *Crelle's* Journal Bd. XL, S. 237.

Versuche stimmen mit meiner Arbeit wenig überein. Die nachstehenden Angaben mögen eine ohngefähre Vorstellung meiner Resultate gewähren, so wie auch den Weg und die Mittel eröffnen, die zu ihrem Beweis führen, welcher für die gewöhnliche analytische Behandlung ohne Zweifel schwierig war, aber nunmehr, durch Hülfe der in meinem schon citirten Aufsatze enthaltenen Hauptsätze über Polar-Enveloppen bei algebraischen Curven, leicht zu führen ist.

I. Man denke sich eine allgemeine Curve vierten Grads, C^4. Ihre 28 Doppeltangenten t, paarweise zusammengefafst, geben 378 Paare; jedes Paar heifse π, und der gegenseitige Schnittpunct jedes Paars heifse p, so giebt es eben so 378 Puncte p. Seien m und n, m_1 und n_1 die Berührungspuncte eines Tangentenpaars π mit der Curve; man verbinde sie wechselseitig durch zwei Paar Gerade mm_1 und nn_1, mn_1 und nm_1, und nenne deren gegenseitige Schnittpuncte q, r. Dann gehören zu jedem Tangentenpaar π drei Puncte p, q, r.

II. Die 378 Puncte p, und mit ihnen zugleich auch die 378 Paare π, ordnen sich nach einem bestimmten Gesetz zu 6 und 6 in Gruppen, G, so dafs 63 Gruppen G entstehen, wovon keine zwei einen Punct p oder ein Paar π gemein haben.

„Die 6 Puncte p jeder Gruppe G liegen in irgend einem Kegelschnitte, G^2, was im Ganzen 63 Kegelschnitte G^2 giebt."

Die zu einer Gruppe gehörigen $6p$ hängen von 12 verschiedenen Tangenten t ab, also von 6 Paaren π, welche keine Tangente gemein haben, so dafs von den je $6p$ keine zwei in der nämlichen Tangente liegen.

III. Die 8 Berührungspuncte je zweier zu einerlei Gruppe gehörigen Tangentenpaare π liegen allemal in irgend einem Kegelschnitte, B^2, so dafs zu jeder Gruppe $\frac{1}{2}6.5 = 15$ Kegelschnitte B^2 gehören. Danach sollte es für die 63 Gruppen $63.15 = 945$ Kegelschnitte B^2 geben; allein dabei wird jeder dreimal gezählt, und somit giebt es im Ganzen nur 315 verschiedene Kegelschnitte B^2. Das heifst:

„Unter den 28 Doppeltangenten t einer Curve vierten Grads C^4 giebt es, im Allgemeinen, 315 mal 4 solche, deren 8 Berührungspuncte zusammen in irgend einem Kegelschnitte B^2 liegen."

IV. *„Die zu jeder Gruppe G gehörigen 18 Puncte, nämlich die 6p, 6q und 6r* (I.) *liegen zusammen in irgend einer Curve dritten Grads G^3, so dafs es 63 Curven G^3 giebt."*

Jede Curve G^3 schneidet die gegebene Curve C^4 in 12 Puncten a, was im Ganzen $63.12 = 756$ bestimmte Puncte a giebt. Jeder Punct a hat

die Eigenschaft: *dafs irgend ein Kegelschnitt A^2 die gegebene Curve C^4 in demselben vierpunctig und nebstdem noch in irgend zwei andern bestimmten Puncten b und c einfach (d. h. zweipunctig) berühren kann.* Also:

„Soll ein Kegelschnitt A^2 eine gegebene Curve vierten Grads C^4 in irgend einem Puncte, a, vierpunctig und zudem noch in irgend zwei andern Puncten b und c einfach berühren, so finden, im Allgemeinen, 756 Lösungen statt."

Werden zwischen je drei zusammengehörigen Puncten *a, b* und *c* die Geraden *ab, ac* und *bc* gezogen, und im Puncte *a* an die Curven C^4 und G^3 die Tangenten A und A_1 gelegt: *so sind die vier Geraden ab, A, ac, A_1 harmonisch, also A_1 durch die drei andern bestimmt, und so liegt der Schnittpunct, d, der Geraden A und bc auf der Curve G^3, so dafs man von dieser 12 neue Puncte d erhält.*

„Die zu jeder Gruppe G gehörigen 84 Geraden, nämlich die 6 Tangentenpaare π (= 12 Gerade t), die 6 mal 4 Geraden mm_1, nn_1, mn_1 und nm_1, die 12 Tangenten A, und endlich die 12 mal 3 Geraden ab, ac und bc werden zusammen von irgend einer Curve dritter Classe K^3 (und 6ten Grads) berührt; und zwar berührt sie die Geraden ab und ac in den Puncten b und c selbst, so dafs also die 12b und 12c zugleich ihre 24 Schnittpuncte mit der gegebenen Curve C^4 sind." „Es giebt im Ganzen 63 Curven K^3."

Die zu jeder Gruppe gehörigen zwei Curven G^3 und K^3 haben eine interessante innige Beziehung zu einander, wovon ich hier nur Einiges kurz andeuten will. Jeder der 9 Wendepuncte der Curve G^3 werde durch w und die Wendetangente durch W bezeichnet; aus jedem w gehen drei Tangenten Q, Q_1, Q_2 an die Curve, deren Berührungspuncte q, q_1, q_2 in einer Geraden R_1 liegen; der Schnitt von W und R_1 heifse p. Jede der 9 Rückkehrtangenten der Curven K^3 werde durch R und der Rückkehrpunct durch r bezeichnet; jede R schneidet die Curve in drei Puncten q, q', q'', deren zugehörige Tangenten Q, Q', Q'' sich in einem Puncte w_1 treffen; die Gerade rw_1 heifse P. *Nun stehen die Curven G^3 und K^3 in solcher Verbindung, dafs sie einander in den 9 Puncten q berühren, also die 9Q zu Berührungstangenten haben, dafs ferner sowohl die 9 Paar Puncte w und w_1, als die 9 Paar Gerade R und R_1 zusammenfallen, und dafs zudem sowohl die 4 Geraden $WQ'QQ''$ als die 4 Puncte rq_1qq_2 harmonisch sind, und dafs somit auch die 4 Puncte $pq'qq''$ so wie die 4 Geraden PQ_1QQ_2 harmo-*

nisch sind. — Die weiteren Beziehungen der beiden Curven behalte ich mir vor, bei einer geeignetern Gelegenheit umständlicher zu erörtern.

V. Die 63 Gruppen G (II.) ordnen sich nach einem gewissen Gesetz zu 3 und 3 zu Systemen, S, so nämlich, dafs zu je zwei Gruppen *allemal irgend eine,* aber *nur eine bestimmte* dritte Gruppe gehört, welche mit ihnen ein System S bildet. Die Zahl der Systeme ist daher $= 651$, und jede Gruppe kommt in 31 Systemen vor.

Aus einem gewissen Grunde kann man die Systeme in zwei Abtheilungen bringen, und sie demgemäfs durch S_1 und S_2 unterscheiden. Dann enthält die erste Abtheilung 315 Systeme S_1 und die zweite 336 Systeme S_2, und dann kommt jede Gruppe in 15 Systemen S_1 und in 16 Systemen S_2 vor. Die Systeme beider Abtheilungen unterscheiden sich, unter andern, wie folgt:

1. Die drei Gruppen jedes Systems S_1 haben allemal vier, und zwar vier solche Doppeltangenten t gemein, welche in jeder Gruppe zwei Paare π bilden, nämlich sind z. B. u, x, y und z die vier gemeinschaftlichen Tangenten t, so müssen etwa ux und yz Paare der ersten, uy und xz Paare der zweiten, und uz und xy Paare der dritten Gruppe sein. Durch die 8 Berührungspuncte solcher vier Tangenten u, x, y, z geht also immer ein Kegelschnitt B^2 (III.). Die drei Gruppen umfassen zusammen alle 28 Doppeltangenten t, und nehmen vier derselben, u, x, y und z, dreifach in Anspruch.

2. Dagegen enthalten die drei Gruppen jedes Systems S_2 zusammen nur je 18 Doppeltangenten t, indem jede der letztern zu je zwei Gruppen gehört, also je zwei Gruppen sechs Tangenten gemein haben; oder, wenn man die 18 Tangenten durch a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; b, b_1, ... b_5; c, c_1, ... c_5 bezeichnet, dafs etwa

ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5 Paare der ersten,
ac, a_1c_1, a_2c_2, a_3c_3, a_4c_4, a_5c_5 Paare der zweiten,
bc, b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, b_4c_4, b_5c_5 Paare der dritten

Gruppe sind.

Abgesehen von diesem Unterschiede haben alle Systeme folgende gemeinsame Eigenschaft:

„Wählt man aus den drei Gruppen eines Systems S aus jeder ein beliebiges Tangentenpaar π, so liegen die 12 Berührungspuncte derselben allemal in irgend einer Curve dritten Grads, B^3."

Nach blofser Combination müfsten hiernach zu jedem System S

$$6.6.6 = 216$$

Curven B^3 gehören, und im Ganzen sollte es

$$63.216 = 140616$$

Curven B^3 geben. Allein dabei ist eine und dieselbe Curve mehr oder weniger oft gezählt, so dafs die Zahl der von einander verschiedenen Curven B^3 bedeutend geringer ist. Zudem ist B^3 nicht immer eine Curve von allgemeiner Form, vielmehr besteht sie, in der Mehrzahl der Fälle, aus einem Kegelschnitte und einer Geraden, oder aus drei Geraden; und zwar sind diese Kegelschnitte keine andern als die obigen 315 Kegelschnitte B^2 (III.), und die Geraden bestehen nur aus den 28 Doppeltangenten t selbst. Nämlich es verhält sich damit wie folgt.

Bei jedem System S_1, wo jede der vier gemeinschaftlichen Tangenten u, x, y, z durch t_0 und der durch ihre 8 Berührungspuncte gehende Kegelschnitt B^2 durch B_0^2 bezeichnet werden mag, bestehen von den 216 Curven B^3:

a) 4 aus drei Geraden, nämlich aus uxy, uxz, uyz und xyz;

b) 4 aus $B_0^2 + t_0$, d. h. aus B_0^2 und je einer Geraden u, x, y oder z;

c) 48 aus $B^2 + t_0$, aus je einer Geraden u, x, y, z und je einem Kegelschnitte B^2; und

d) 160 aus eigentlichen Curven B^3.

Bei jedem System S_2 dagegen bestehen die 216 B^3:

e) 6 aus je drei Geraden, nämlich aus abc, $a_1b_1c_1$, ..., $a_5b_5c_5$;

f) 90 aus $B^2 + t$, nämlich aus je einem B^2 und je einer der 18 Geraden $a, a_1, \ldots, a_5$; $b, b_1, \ldots b_5$; $c, c_1, \ldots, c_5$; und

g) 120 sind eigentliche Curven B^3.

Hiernach gäbe es im Ganzen:

α. Solche B^3, welche aus drei Geraden bestehen (*a.* und *c.*):

$$315 \times 4 + 336 \times 6 = 3276,$$

was gerade der Zahl der Combinationen der 28 Doppeltangenten t zu je dreien gleich ist, $= 28.27.26 : 6 = 3276$.

β. Solche B^3, welche aus $B_0^2 + t_0$ bestehen, wobei der Kegelschnitt B_0^2 durch die Berührungspuncte der Tangente t_0 geht (*b.*):

$$315 \times 4 = 1260.$$

γ. Solche B^3, welche aus $B^2 + t$ bestehen, wo B^2 nicht durch die Berührungspuncte von t geht (*c.* und *f.*):

$$315 \times 48 + 336 \times 90 = 45360.$$

δ. Eigentliche, nicht in Theile zerfallende Curven B^3 (*d.* und *g.*):

$$315 \times 160 + 336 \times 120 = 90720,$$

was zusammen die obige Zahl 140616 ausmacht.

γ°. Da es nun nur 315 Kegelschnitte B^2 giebt (III.), in (γ.) aber 45360 vorkommen, so mufs jeder derselben 144 mal in Anspruch genommen sein, und da er dabei jedesmal mit einer der 24 Tangenten t, durch deren Berührungspuncte er *nicht* geht, verbunden ist, so mufs er mit jeder dieser Tangenten $144:24 = 6$ mal vorkommen, so dafs also unter (γ.) nur

$$45360:6 = 7560$$

verschiedene $B^2 + t$ enthalten sind, von denen noch je 24 den nämlichen Kegelschnitt B^2 haben und sich nur durch die Tangente t von einander unterscheiden.

δ°. Da ferner in (δ.) jede Curve B^3 durch die Berührungspuncte von 6 Tangenten t geht, welche 15 mal als 3 Paare π auftreten, so wird dieselbe auch 15 mal wiederholt, so dafs es also nur

$$90720:15 = 6048$$

verschiedene eigentliche Curven B^3 giebt.

Somit giebt es von einander verschiedene Curven B^3

[α.] 3276, bestehend aus je $3t$;
[β.] 1260, bestehend aus $B_0^2 + t_0$;
[γ°.] 7560, bestehend aus $B^2 + t$, und
[δ°.] 6048 eigentliche Curven B^3;

also zusammen $= 18144$.

Das Hauptresultat ist in (δ°.) enthalten, nämlich:

„Unter den 28 Doppeltangenten t einer Curve vierten Grads giebt es, im Allgemeinen, 6048 mal 6 solche, deren 12 Berührungspuncte zusammen in irgend einer eigentlichen, nicht in Theile zerfallenden, Curve dritten Grads B^3 liegen.“

VI. Die 63 Gruppen G (II.) ordnen sich nun ferner zu 4 und 4 zu Systemen, $S[4]$, und zwar dergestalt, dafs zu je drei Gruppen, welche nicht schon im Vorigen (V.) ein System S bilden, allemal *eine, aber nur eine* bestimmte vierte Gruppe gehört, die mit ihnen ein System $S[4]$ bildet. Dabei darf also auch die vierte Gruppe mit keinen zweien der drei ersten Gruppen ein System S bilden. Es giebt im Ganzen 9765 Systeme $S[4]$. Dieselben haben, unter andern, folgende gemeinsame Eigenschaft:

„Wählt man aus den vier Gruppen eines Systems $S[4]$, *aus jeder ein beliebiges Tangentenpaar* π, *so liegen die 16 Berührungspuncte derselben allemal in einer Curve vierten Grads* B^4."

VII. Gleicherweise ordnen sich die 63 Gruppen zu 5 und 5 zu Systemen, $S[5]$, dergestalt, dafs zu jeden vier Gruppen, welche weder ein System S (V.) noch ein System $S[4]$ (VI.) bilden, *allemal eine,* aber *nur eine bestimmte* fünfte Gruppe gehört, die mit ihnen ein System $S[5]$ bildet, und wobei dann auch diese fünfte Gruppe weder mit zweien noch dreien von jenen vier Gruppen eines der vorhergehenden Systeme bildet. Es giebt 109368 Systeme $S[5]$. Sie haben folgende Eigenschaft:

„Wählt man aus jeder der fünf Gruppen eines solchen Systems $S[5]$ *ein beliebiges Tangentenpaar* π, *so liegen die 20 Berührungspuncte derselben allemal in einer Curve fünften Grads* B^5."

VIII. Ebenso ordnen sich die 63 Gruppen weiter zu 6 und 6 zu Systemen $S[6]$, so dafs zu je fünf Gruppen, welche unter sich keins der bisherigen Systeme bilden, *allemal eine, aber nur eine* bestimmte sechste Gruppe gehört, die dann auch weder mit 2, noch 3, noch 4 von jenen 5 Gruppen eines der vorhergehenden Systeme bildet. Die Zahl der Systeme $S[6]$ ist $= 874944$.

„Wählt man bei einem solchen System $S[6]$ *sechs Tangentenpaare* π *beliebig, jedoch aus jeder Gruppe eins, so liegen ihre 24 Berührungspuncte allemal in einer Curve sechsten Grads* B^6."

IX. Endlich ordnen sich die 63 Gruppen auch noch in Systeme $S[7]$ von 7 und 7 Gruppen, so dafs zu je sechs Gruppen, die unter sich keins der bisherigen Systeme bilden, allemal *eine bestimmte* siebente Gruppe gehört, welche ebenso mit keinen 2, noch 3, noch 4, noch 5 von jenen 6 Gruppen eines der früheren Systeme bildet. Die Zahl der Systeme $S[7]$ ist $= 3999744$.

„Wählt man aus den sieben Gruppen eines solchen Systems $S[7]$ *sieben Tangentenpaare beliebig, aus jeder Gruppe eins, so liegen ihre 28 Berührungspuncte allemal in einer Curve siebenten Grads* B^7."

Weitere Systeme zu 8, 9, ... Gruppen giebt es nicht.

Bemerkung. Wenn oben (VI, VII, VIII und IX.) gesagt wird: die 16, 20, 24, 28 Berührungspuncte liegen in einer Curve B^4, B^5, B^6, B^7, so ist darunter nicht zu verstehen, es seien diese Curven dadurch bestimmt (wie dies in (V.) der Fall war), — vielmehr gehen unendlich viele Curven desselben Grads durch die nämlichen Puncte, — sondern es ist damit nur

gemeint: die Puncte haben die besondere Eigenschaft, dafs solche Curven durch sie gehen können. Denn werden in der gegebenen Curve C^4 eine gleiche Zahl Puncte willkürlich angenommen, so gehen durch sie keine Curven von den respective angegebenen Graden, weil nämlich von den $4n$ Schnittpuncten, welche eine Curve n^{ten} Grads B^n mit der gegebenen Curve C^4 haben kann, bekanntlich nur $4n-3$ willkürlich angenommen werden dürfen, indem durch diese die 3 übrigen schon bestimmt sind.

X. Das Vorstehende giebt unter andern Anlafs zu folgenden Fragen oder Aufgaben.

1. ***Welche Resultate erhält man, wenn die Systeme in*** (VI.), (VII.), (VIII.) ***und*** (IX.) ***eben so umständlich discutirt werden, wie es oben*** (V.) ***mit den Systemen S geschehen ist?*** Oder insbesondere kann man fragen: ***„Wie oft giebt es unter den 28 Doppeltangenten t 8, 10, 12 oder 14 solche, deren 16, 20, 24 oder 28 Berührungspuncte beziehlich in einer eigentlichen Curve B^4, B^5, B^6 oder B^7 liegen?"***

2. ***Wie verhalten sich die 63 Kegelschnitte G^2*** (II.) ***rücksichtlich ihrer Lage zu einander?***

3. ***Welche Beziehung haben die 63 Curven dritten Grads G^3*** (IV.) ***zu einander?*** Und

4. ***Welche Beziehung haben die 63 Curven dritter Classe K^3*** (IV.) ***rücksichtlich ihrer Lage zu einander?***

Berlin, im October 1852.

16.

Aufgaben und Lehrsätze.

(Von Herrn *J. Steiner* zu Berlin.)

---

1. *„Soll ein Kegelschnitt beschrieben werden, welcher durch drei gegebene Puncte geht und eine gegebene Curve n^{ten} Grads in irgend einem Puncte osculirt (dreipunctig berührt), so finden, im Allgemeinen,*

$$3n(n-1)$$

Lösungen statt." — Kommen die gegebenen drei Puncte insbesondere in die gegebene Curve selbst zu liegen, so verringert sich die Zahl der Lösungen, und zwar mit jedem Punct, der in die Curve tritt, um 2, so dafs also, wenn alle drei in derselben liegen, die Zahl der Lösungen nur $= 3n(n-1) - 6 = 3(n+1)(n-2)$ ist.

2. *Wie viele solche Kegelschnitte giebt es, welche eine gegebene Curve n^{ten} Grads in irgend einem Puncte osculiren und zudem entweder*

a. durch zwei gegebene Puncte gehen und eine gegebene Gerade berühren; oder

b. durch einen gegebenen Punct gehen und zwei gegebene Gerade berühren; oder

c. drei gegebene Gerade berühren?

3. *„Soll ein Kegelschnitt beschrieben werden, welcher durch drei gegebene Puncte geht und eine gegebene Curve n^{ten} Grads in irgend zwei Puncten berührt, so finden, im Allgemeinen,*

$$\tfrac{1}{2}(n-1)n(n+1)(n+2) - 4(n-1)n = \tfrac{1}{2}(n^4+2n^3-9n^2+6n)$$

Lösungen statt." — Kommen von den gegebenen Puncten, die *a, b, c* heifsen mögen, einer, oder zwei, oder alle drei in die gegebene Curve zu liegen, so vermindert sich die Zahl der Lösungen stufenweise; nämlich alsdann befinden sich unter den lösenden Kegelschnitten auch solche, welche die Curve in den gegebenen Puncten selbst berühren, und dann fallen mit jeder solchen Berührung zwei der genannten Kegelschnitte in einen zusammen. Liegt z. B. der erste Punct *a* in der Curve, so wird sie von n^2+n-4 der genannten

Kegelschnitte in a selbst berührt, und somit vermindert sich die Zahl der Lösungen ebenfalls um n^2+n-4. Oder zählt man dabei blofs diejenigen Kegelschnitte, welche nicht in a berühren, so ist ihre Anzahl um

$$2(n^2+n-4)$$

geringer, als die obige Gesammtzahl. Und tritt nun ferner auch der zweite Punct b in die gegebene Curve, so verringert sich die Anzahl derjenigen Kegelschnitte, welche weder in a noch b berühren, auf's Neue um

$$2(n^2+n-6);$$

und gelangt auch noch der dritte Punct c in die Curve, so vermindert sich die Zahl der Kegelschnitte, welche weder in a, noch b, noch c berühren, abermals um

$$2(n^2+n-8),$$

so dafs also nur noch

$$\tfrac{1}{2}(n^4+2n^3-21n^2-6n+72) = \tfrac{1}{2}(n-3)(n-2)(n+3)(n+4)-2(n-3)n$$

solche Kegelschnitte übrig bleiben, indem die Verminderungen zusammen

$$6(n^2+n-6)$$

betragen. Die andern Kegelschnitte reduciren sich auf je n^2+n-8, welche beziehlich im Puncte a oder b oder c berühren, und ferner auf drei, welche beziehlich in a und b, a und c, b und c berühren; zählt man die erstern doppelt und die letztern vierfach, so kommt richtig

$$3(n^2+n-8)\times 2+3\times 4 = 6(n^2+n-6).$$

Werden aber diese (in a, b, c berührenden) Kegelschnitte auch nur einfach gezählt, was $=3(n^2+n-7)$ ausmacht, so beträgt die Zahl aller Kegelschnitte nur noch

$$\tfrac{1}{2}(n^4+2n^3-15n^2+30) = \tfrac{1}{2}nn(n-3)(n+5)+15,$$

und dann sind

$$3(n^2+n-5)$$

Kegelschnitte als verschwunden anzusehen.

Wie man bemerken wird, ist in dem obigen Satze, unter andern, auch der bekannte besondere Satz enthalten: *„Dafs durch drei gegebene Puncte, im Allgemeinen, vier Kegelschnitte gehen, welche einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren (oder welche zwei gegebene Gerade berühren).“*

4. Aus der vorstehenden Auseinandersetzung (3.) ergeben sich folgende specielle Sätze.

I. *„Soll ein Kegelschnitt eine gegebene Curve n^{ten} Grads in einem (auf ihr) gegebenen Puncte, a, osculiren und dieselbe nebstdem noch in irgend zwei andern Puncten berühren, so finden, im Allgemeinen*

$$\tfrac{1}{2}(n^4+2n^3-21n^2-6n+72)$$

Lösungen statt." Und

II. *„Soll der Kegelschnitt die gegebene Curve in einem gegebenen Puncte a vierpunctig und nebstdem noch in irgend einem andern Puncte (einfach) berühren, so giebt es, im Allgemeinen,*

$$n(n+1)-8$$

Lösungen."

5. Ähnlicherweise ergiebt sich aus dem Satze (1.) der folgende specielle Satz:

„Soll ein Kegelschnitt eine gegebene Curve n^{ten} Grads in einem gegebenen Puncte a und noch in irgend einem andern Puncte osculiren, so finden

$$3n(n-1)-9$$

Lösungen statt."

6. *Wie viele solche Kegelschnitte giebt es, welche eine gegebene Curve n^{ten} Grads doppelt berühren und zudem entweder*

a. durch zwei gegebene Puncte gehen und eine gegebene Gerade berühren; oder

b. durch einen gegebenen Punct gehen und zwei gegebene Gerade berühren; oder

c. drei gegebene Gerade berühren?

7. In Rücksicht der obigen Sätze (1.) und (3.) mögen noch folgende besondere Fälle hervorgehoben werden.

I. *„Hat eine Curve $2n^{ten}$ Grads drei nfache Puncte, aber aufserdem keine andere vielfache Puncte, und soll ein Kegelschnitt durch jene drei Puncte gehen und zudem die Curve entweder*

a) in irgend einem andern Puncte osculiren: so ist die Zahl der Lösungen $= 3n(n-2)$; oder

b) in irgend zwei andern Puncten berühren: so ist die Zahl der Lösungen $= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$."

II. *„Hat eine Curve $2n^{ten}$ Grads zwei $n$fache und einen $(n-1)$fachen Punct, aber sonst keine vielfache Puncte, und soll ein Kegelschnitt durch dieselben gehen und zudem die Curve entweder*

a) in irgend einem andern Puncte osculiren: so ist die Zahl der Lösungen $= 3(n+1)(n-1)$; *oder*

b) in irgend zwei andern Puncten berühren: so ist die Zahl der Lösungen $= \frac{1}{2}(n+1)(n-1)(n-2)(n+4)$.“

III. *„Hat eine Curve $(2n-1)^{ten}$ Grads drei $(n-1)$fache Puncte, aber sonst keinen vielfachen Punct, und soll ein Kegelschnitt durch dieselben gehen und nebstdem die Curve entweder*

a) in irgend einem andern Puncte osculiren: so ist die Zahl der Lösungen $= 3(n+1)(n-1)$; *oder*

b) in irgend zwei andern Puncten berühren: so ist die Zahl der Lösungen $= \frac{1}{2}(n+1)(n-1)(n-2)(n+4)$.“

IV. *„Hat eine Curve $(2n-1)^{ten}$ Grads einen $n$fachen und zwei $(n-1)$fache Puncte, aber aufserdem keinen vielfachen Punct, und soll ein durch dieselben gehender Kegelschnitt die Curve entweder*

a) in irgend einem andern Puncte osculiren: so ist die Zahl der Lösungen $= 3n(n-2)$; *oder*

b) in irgend zwei andern Puncten berühren: so ist die Zahl der Lösungen $= \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$.“

8. *Wenn irgend zwei Krümmungskreise eines Kegelschnitts der Gröfse und Lage nach gegeben sind, den Ort seines Mittelpuncts zu finden. — „Der Ort der Geraden, welche durch die je zwei Puncte geht, in denen die Kreise vom Kegelschnitte osculirt werden, ist eine Curve 6ter Classe.“*

9. *„Die einer Ellipse eingeschriebenen n Ecke von gröfstem Umfange haben gleichen Umfang* (s. Bd. 37. S. 189—191 dieses Journals). *Diesen Umfang zu finden, wenn die Ellipse gegeben ist.“*

10. I. *Unter allen einer gegebenen Ellipse eingeschriebenen Dreiecken von gröfstem Inhalte dasjenige zu bestimmen, dessen Umfang ein Maximum oder ein Minimum ist.*

II. *Unter allen einer gegebenen Ellipse eingeschriebenen Dreiecken vom gröfsten Umfange dasjenige zu finden, dessen Inhalt ein Maximum oder ein Minimum ist.* Oder allgemeiner:

11. I. ***Unter allen einer gegebenen Ellipse eingeschriebenen n Ecken von gröfstem Inhalte dasjenige zu finden, dessen Umfang ein Maximum oder ein Minimum ist.*** Und

II. ***Unter allen einer gegebenen Ellipse eingeschriebenen n Ecken von gröfstem Umfange dasjenige zu finden, dessen Inhalt ein Maximum oder ein Minimum ist.***

In Betreff des Vierecks findet sich die letzte Frage (II.) in meiner schon citirten Abhandlung (s. Bd. 37. S. 184 dies. Journ.) bereits beantwortet, nämlich ***„der Inhalt des Vierecks ist ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem seine Seiten den gleichen conjugirten Durchmessern oder den Axen der Ellipse parallel sind."*** Aber auch die erste Frage (I.) ist für das Viereck leicht zu beantworten, und zwar fast gleichlautend, nämlich:

„Unter allen einer Ellipse eingeschriebenen Vierecken von gröfstem Inhalte ist der Umfang desjenigen ein Maximum, etwa $= u$, welches die Axen der Ellipse zu Diagonalen hat (oder dessen Seiten den gleichen conjugirten Durchmessern parallel); dagegen ist der Umfang desjenigen ein Minimum, $= u_1$, welches die gleichen conjugirten Durchmesser der Ellipse zu Diagonalen hat (oder dessen Seiten den Axen parallel sind)." Dabei ist, wenn a und b die Halbaxen der Ellipse sind:

$$u = 4\sqrt{(a^2+b^2)}; \qquad u_1 = 2(a+b)\sqrt{2},$$

und daher:

$$u^2 - u_1^2 = 8(a-b)^2.$$

12. ***„Sind a und b, a_1 und b_1 die Axen zweier confocaler Kegelschnitte, etwa zweier Ellipsen E^2 und E_1^2, und sind dieselben so beschaffen, dafs***

$$\text{I.} \qquad \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1,$$

so giebt es unendlich viele solche Dreiecke, welche der Curve E^2 ein- und zugleich der Curve E_1^2 umgeschrieben sind." „Und sind die Axen so beschaffen, dafs

$$\text{II.} \qquad a^2 : b^2 = a_1 : b_1,$$

so giebt es unendlich viele solche Vierecke, welche der E^2 ein- und zugleich der E_1^2 umgeschrieben sind."

13. ***„Welche Relation mufs zwischen den Axen zweier confocaler Kegelschnitte E^2 und E_1^2 statt finden, damit sich ein n Eck dem***

einen ein- und zugleich dem andern umschreiben läfst? — Sobald sich nämlich nur irgend ein n Eck auf die geforderte Art beschreiben läfst, so lassen sich, zufolge eines schönen Satzes von ***Poncelet***, unendlich viele andere n Ecke eben so beschreiben. Und alsdann haben alle diese n Ecke gleichen Umfang, und zwar unter allen der Curve E^2 eingeschriebenen n Ecken den *gröfsten*, und unter allen der Curve E_1^2 umgeschriebenen n Ecken den *kleinsten* Umfang (s. dies. Journal Bd. 37. S. 189).

Berlin, im November 1852.

17.

Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.

(Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.)

---

§. 1.

Der geometrische Ort des Pols einer gegebenen geraden Linie in einem Systeme Kegelschnitte, welche sich in denselben 4 Puncten schneiden, ist wieder ein Kegelschnitt.

Man kann noch hinzufügen, dafs dieser Kegelschnitt immer durch dieselben 3 Puncte hindurchgeht, wenn man die gerade Linie variiren läfst, nämlich durch die 3 Diagonalpuncte des Viereckes, dessen Ecken jene 4 Schnittpuncte sind.

Dieser bekannte Satz der ebenen Geometrie läfst sich auf doppelte Art auf den ***Raum*** ausdehnen, indem man für die gerade Linie eine ***Ebene*** substituirt und für das System von Kegelschnitten entweder ein System von ***Oberflächen*** zweiter Ordnung, welche durch 8 im Raume gegebene Puncte hindurchgehen, oder ein System von ***Oberflächen*** zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Puncte hindurchgehen.

Im ersten Falle erhält man den von ***Chasles*** in seinem „Aperçu historique etc. not. 33" angegebenen Satz, nämlich:

Wenn mehrere Oberflächen zweiter Ordnung durch 8 gegebene Puncte gehen, so liegen die Pole irgend einer Ebene, in Bezug auf diese Oberflächen genommen, auf einer Curve doppelter Krümmung von der dritten Ordnung.

Diese Curve läfst sich allein für sich nicht als die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung darstellen, sondern immer nur in der Verbindung mit einer geraden Linie, welche die Curve dritter Ordnung in zwei verschiedenen Puncten schneidet. Es ist noch zu bemerken, dafs die genannte Curve doppelter Krümmung von der dritten Ordnung, durch die Spitzen der vier Kegel zweiter Ordnung hindurchgeht, welche sich durch die 8 gegebenen Puncte hindurchlegen lassen.

In dem andern Falle erhält man folgenden Satz:

Der geometrische Ort des Pols einer gegebenen Ebene in einem

System von Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch 7 gegebene Puncte hindurchgehen, ist eine Oberfläche dritter Ordnung.

In der That: wenn

$$(1.) \quad f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0$$

die in Rücksicht auf die Coordinaten x, y, z, p homogenen Gleichungen von irgend drei Oberflächen zweiter Ordnung darstellen, welche durch 7 gegebene Puncte hindurchgehen, und man setzt

$$(2.) \quad 2F = zf + \lambda\varphi + \mu\psi,$$

so ist $2F = 0$ mit den willkürlichen Constanten z, λ, μ die Gleichung einer beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die 7 gegebenen Puncte hindurchgeht. Wenn ferner die Gleichung der gegebenen Ebene

$$(3.) \quad ax + by + cz + dp = 0$$

ist, und man läfst x, y, z, p die Coordinaten des Poles der genannten Ebene in Rücksicht auf die Oberfläche $2F = 0$ bedeuten, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} zf'x + \lambda\varphi'x + \mu\psi'x + \nu a &= 0, \\ zf'y + \lambda\varphi'y + \mu\psi'y + \nu b &= 0, \\ zf'z + \lambda\varphi'z + \mu\psi'z + \nu c &= 0, \\ zf'p + \lambda\varphi'p + \mu\psi'p + \nu d &= 0; \end{aligned}$$

woraus man durch Elimination von z, λ, μ, ν, und wenn man die Determinante durch A bezeichnet, nämlich:

$$(4.) \quad A = \begin{vmatrix} f'x & \varphi'x & \psi'x & a \\ f'y & \varphi'y & \psi'y & b \\ f'z & \varphi'z & \psi'z & c \\ f'p & \varphi'p & \psi'p & d \end{vmatrix},$$

die Gleichung vom dritten Grade in Rücksicht auf die Coordinaten des Pols

$$(5.) \quad A = 0$$

erhält, welche der Oberfläche dritter Ordnung zugehört, die durch den Pol beschrieben wird.

Da der Pol jeder beliebigen Ebene, in Rücksicht auf einen Kegel zweiter Ordnung, die Spitze des Kegels ist, und durch die 7 gegebenen Puncte ein ganzes System von Kegeln zweiter Ordnung sich hindurchlegen läfst, so werden die Spitzen dieser Kegel auf der Oberfläche dritter Ordnung liegen, und man kann den angegebenen Satz wie folgt vervollständigen:

Auf der genannten Oberfläche dritter Ordnung liegt die Curve, welche die Spitze des Kegels zweiter Ordnung beschreibt, der durch die 7 gegebenen Puncte hindurchgeht.

Es schneiden sich also alle Oberflächen dritter Ordnung, $A=0$, welche man erhält, wenn man die Ebene (3.) beliebig variiren läfst, in der Curve, welche die Spitze des Kegels zweiter Ordnung beschreibt, der durch die 7 gegebenen Puncte hindurchgeht.

Diese Curve der Kegelspitzen wollen wir nun zunächst betrachten.

Wenn man annimmt, $\varkappa$, λ, μ seien so bestimmt, dafs $2F=0$ zur Gleichung eines Kegels wird, und man läfst x, y, z, p die Coordinaten der Spitze P des Kegels bedeuten, so hat man folgende Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} 2F'x = \varkappa f'x + \lambda\varphi'x + \mu\psi'x = 0, \\ 2F'y = \varkappa f'y + \lambda\varphi'y + \mu\psi'y = 0, \\ 2F'z = \varkappa f'z + \lambda\varphi'z + \mu\psi'z = 0, \\ 2F'p = \varkappa f'p + \lambda\varphi'p + \mu\psi'p = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\varkappa$, λ, μ aus je drei Gleichungen erhält man nun folgende Gleichungen von vier Oberflächen dritter Ordnung:

$$(7.)\quad \frac{\partial A}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial c}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial d}=0,$$

welche Oberflächen sämmtlich durch die Curve der Kegelspitzen hindurchgehen; woraus sich wiederum die allgemeine Gleichung $A=0$ mit den willkürlichen Constanten a, b, c, d derjenigen Oberfläche dritter Ordnung zusammensetzen läfst, welche durch die Curve der Kegelspitzen hindurchgeht.

Irgend zwei von den Oberflächen dritter Ordnung $A=0$ schneiden sich jetzt in einer Curve doppelter Krümmung von der 9ten Ordnung; unter welcher eine Curve zu verstehen ist, die von jeder beliebigen Ebene in 9 Puncten geschnitten wird. In der That schneidet jede der genannten Oberflächen die beliebig angenommene Ebene in einer ebenen Curve dritter Ordnung, und zwei solcher Curven schneiden sich bekanntlich in 9 Puncten.

Diese Curve 9ter Ordnung zerfällt in eine Curve 6ter Ordnung, in welcher die Kegelspitzen liegen, und in eine Curve 3ter Ordnung, in welcher die Kegelspitzen nicht liegen. Ich werde diese Behauptung dadurch rechtfertigen, dafs ich zwei Oberflächen $A=0$ angebe, welche eine gegebene Ebene in zwei ebenen Curven 3ter Ordnung schneiden, deren 9 Schnittpuncte

so beschaffen sind, dafs 3 derselben mit den beiden Oberflächen $A=0$ variiren. Diese 3 Puncte können dann nicht die Spitzen von Kegeln zweiter Ordnung sein, welche durch die gegebenen 7 Puncte hindurchgehen, weil die Curve der Kegelspitzen die gegebene Ebene in ganz bestimmten, nicht variabeln, Puncten schneidet.

Da die Gleichung $A=0$ die willkürlichen Constanten a, b, c, d enthält, so kann man diese Constanten auf mehrfache Weise so bestimmen, dafs die Oberfläche $A=0$ durch 2 in der gegebenen Ebene beliebig angenommene Puncte hindurchgeht. Es seien $B=0$ und $C=0$ zwei solche Oberflächen $A=0$, welche durch die beiden in der gegebenen Ebene beliebig angenommenen Puncte hindurchgehen. Jede dieser beiden Oberflächen schneidet nun die gegebene Ebene in einer ebenen Curve 3ter Ordnung, und die beiden Curven 3ter Ordnung schneiden sich in 9 Puncten, von welchen zwei die beliebig angenommenen Puncte sind. Erwägt man aber, dafs durch 8 Schnittpuncte zweier ebenen Curven 3ter Ordnung der 9te Schnittpunct bestimmt wird, so wird, wenn man 2 von den 9 Schnittpuncten, wie in unserem Falle, beliebig variiren kann, mit ihnen zugleich noch ein dritter Schnittpunct variiren. Mithin sind von den 9 Schnittpuncten 3 mit den Oberflächen $B=0$ und $C=0$ variabel, welche deshalb nicht Kegelspitzen sein können. Es bleiben also 6 Kegelspitzen in der gegebenen Ebene übrig. Diese Bemerkungen lassen sich in dem folgenden Satze zusammenfassen.

Der geometrische Ort der Spitzen der Kegel, welche durch 7 gegebene Puncte des Raumes hindurchgehen, ist eine Curve doppelter Krümmung 6ter Ordnung.

Man wird den Beweis dieses Satzes nicht für vollständig gelten lassen wollen, da im Grunde nur bewiesen wurde, dafs die Curve der Kegelspitzen nicht von einem höheren Grade als vom 6ten sein kann. Wir werden deshalb in (§. 4.), welcher von den Schnittpuncten einer Oberfläche 2ter Ordnung mit der Curve der Kegelspitzen handeln wird, auf diesen Satz wieder zurückkommen und einen neuen Beweis des Satzes aufstellen.

Der geometrische Ort des Pols, dessen Polar-Ebenen, in Bezug auf die Oberflächen 2ter Ordnung, welche durch 7 gegebene Puncte des Raumes hindurchgehen, sich in derselben geraden Linie schneiden, ist die Curve der Kegelspitzen.

In der That: die Bedingungsgleichungen, welche die Coordinaten x, y, z, p des Pols P zu erfüllen haben, wenn die Polar-Ebenen desselben in Bezug

auf die drei Oberflächen $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ sich in derselben geraden Linie schneiden, sind eben die Gleichungen (6.).

Diese Curve der Kegelspitzen ist wieder eine solche Curve doppelter Krümmung, welche sich nicht als die Schnittcurve zweier algebraischen Oberflächen darstellen läfst. Denn da die genannte Curve von der 6ten Ordnung ist, so könnte sie nur die Schnittcurve einer Oberfläche 3ter Ordnung und einer Oberfläche 2ter Ordnung sein. Wir werden aber später sehen, dafs die Curve der Kegelspitzen nicht auf einer Oberfläche 2ter Ordnung liegen kann. Sie tritt daher immer nur in Verbindung mit einer anderen Curve als der Schnittcurve zweier Oberflächen auf; wie wir sie denn auch im Vorhergehenden als die Schnittcurve zweier Oberflächen $A=0$ von der dritten Ordnung in Verbindung mit einer Curve 3ter Ordnung dargestellt haben.

§. 2.

Da sich die Curve der Kegelspitzen, als die Schnittcurve zweier Oberflächen, nur in Verbindung mit einem überflüssigen Factor ausdrücken läfst, so wollen wir die Coordinaten eines beliebigen Punctes P der genannten Curve bestimmen und zwar befreit von jeder fremdartigen Beimischung. Wenn man zu diesem Zwecke die Function $2F$ nach den Potenzen und Producten der Coordinaten des Puncts P ordnet, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$(8.)\quad 2P = u_{11}x^2 + u_{22}y^2 + u_{33}z^2 + u_{44}p^2 + 2u_{12}xy + 2u_{13}xz + 2u_{14}xp + 2u_{23}yz + 2u_{24}yp + 2u_{34}zp,$$

in welchem die Coëfficienten u lineäre homogene Ausdrücke der Gröfsen $\varkappa$, λ, μ bedeuten. Bezeichnet man ferner durch Δ ***die Determinante der Function F,*** welche die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function gebildete Determinante

$$(9.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}$$

ist, so erhält man als das Resultat der Elimination der Coordinaten des Puncts P aus den Gleichungen (6.) die Gleichung

$$(10.)\quad \Delta = 0.$$

Diese Gleichung ist die Bedingungsgleichung, welche erfüllt werden mufs, wenn die in Rücksicht auf die Coordinaten des Puncts P lineären Gleichungen (6.) zu gleicher Zeit bestehen sollen. Man sieht hieraus, dafs die Gröfsen $\varkappa$, λ, μ

in den Gleichungen (6.) nicht beliebig angenommen werden können, sondern, dafs sie der Gleichung (10.) genügen müssen.

Betrachtet man die genannten Gröfsen als die Coordinaten eines Puncts Π in irgend einer Ebene, so stellt die Gleichung (10.) eine ebene Curve dar, welche von der 4ten Ordnung ist, weil Δ in Rücksicht auf die Coordinaten des Puncts Π derselben Ordnung angehört. Wählt man nun auf dieser ebenen Curve 4ter Ordnung irgend einen Punct Π, so werden die Coordinaten desselben für $\varkappa$, λ, μ, in die Gleichungen (6.) gesetzt, diese Gleichungen erfüllbar machen; und durch Auflösung von dreien dieser Gleichungen wird man die Coordinaten eines Puncts $\boldsymbol{P}$ der Curve der Kegelspitzen erhalten, welche zugleich der vierten Gleichung (6.) genügen. Man sieht hieraus, wie jedem Puncte Π der ebenen Curve 4ter Ordnung *ein* bestimmter Punct $\boldsymbol{P}$ der Curve der Kegelspitzen entspricht, und dafs der Punct $\boldsymbol{P}$ die Curve der Kegelspitzen beschreibt, wenn der entsprechende Punct Π die ebene Curve 4ter Ordnung durchläuft. Ebenso entspricht auch umgekehrt jedem Puncte $\boldsymbol{P}$ der Curve der Kegelspitzen *ein* Punct Π der Curve 4ter Ordnung.

Diese beiden Curven stehen in einem Reciprocitäts-Verhältnisse, welches analytisch durch die Gleichungen (6.) ausgedrückt ist, und welches ich in den folgenden Paragraphen weiter entwickeln werde.

Die Function Δ ist, wie schon erwähnt wurde, eine homogene Function 4ter Ordnung in Rücksicht auf die Coordinaten des Punctes Π. Sie ist eine allgemeine Function von dieser Gattung, wenn man die 30 Coëfficienten, welche die Function $2F$ enthält und aus welchen die 15 Termen der Entwickelung von Δ zusammengesetzt sind, unbestimmt läfst. Man kann sogar über einige dieser 30 Coëfficienten nach Belieben verfügen, ohne die Function Δ dadurch den Character der Allgemeinheit zu nehmen. Aus diesem Grunde *stellt die Gleichung* $\Delta = 0$ *eine beliebige ebene Curve 4ter Ordnung dar*, und die Eigenschaften, welche wir in den folgenden Paragraphen an dieser Curve 4ter Ordnung entwickeln werden, haben allgemeine Gültigkeit für die ebenen Curven 4ter Ordnung.

Zu eben derselben Gleichung (10.), nur durch einen constanten Factor verschiedenen, gelangt man auch, wenn man für die Coordinaten des Puncts $\boldsymbol{P}$ in der Function $2F$ lineäre Substitutionen neuer Variabeln macht, hierauf nach diesen neuen Variabeln differentiirt, die Differentialquotienten gleich 0 setzt, um die den Gleichungen (6.) entsprechenden zu erhalten, und aus diesen Gleichungen die neuen Variabeln eliminirt. In der That: macht man die Sub-

stitutionen:

$$(11.)\quad \begin{cases} x = x_1 X + x_2 Y + x_3 Z + x_4 P, \\ y = y_1 X + y_2 Y + y_3 Z + y_4 P, \\ z = z_1 X + z_2 Y + z_3 Z + z_4 P, \\ p = p_1 X + p_2 Y + p_3 Z + p_4 P, \end{cases}$$

so geht durch dieselben die Function $2F$ in

$$(12.)\quad 2F = F_{11}X^2 + F_{22}Y^2 + F_{33}Z^2 + F_{44}P^2 + 2F_{12}XY + 2F_{13}XZ + 2F_{14}XP + 2F_{23}YZ + 2F_{24}YP + 2F_{34}ZP$$

über; in welchem Ausdrucke der Kürze wegen

$$(13.)\quad F_{pq} = x_p F' x_q + y_p F' y_q + z_p F' z_q + p_p F' p_q$$

gesetzt ist.

Bildet man nun das den Gleichungen (6.) entsprechende System

$$(14.)\quad 2F'X = 0,\quad 2F'Y = 0,\quad 2F'Z = 0,\quad 2F'P = 0$$

und bezeichnet durch ∇ die aus den Coëfficienten der neuen Variabeln in diesen Gleichungen gebildete Determinante:

$$(15.)\quad \nabla = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix},$$

so wird

$$(16.)\quad \nabla = 0$$

das Resultat der neuen Variabeln aus den zuletzt genannten 4 Gleichungen (14.), und man erhält:

$$(17.)\quad \Delta r^2 = \nabla;$$

in welcher Gleichung r die Determinante bedeutet, gebildet aus den Coëfficienten der Substitutionen (11.) (S. dieses Journ. Bd. 42, S. 118).

§. 3.

Eine in der Ebene der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ gegebene gerade Linie

$$(18.)\quad Ax + B\lambda + C\mu = 0$$

schneidet die Curve in 4 Puncten II. Wir wollen untersuchen, welche Eigenschaften die diesen 4 Puncten entsprechenden Puncte P der Curve der Kegelspitzen zeigen.

Setzen wir zu diesem Zwecke den Werth von μ aus der Gleichung (18.) in das System Gleichungen (6.), so geht das letztere in

$$(19.)\quad \begin{cases} \varkappa\left(\frac{f'x}{A}-\frac{\psi'x}{C}\right)+\lambda\left(\frac{\varphi'x}{B}-\frac{\psi'x}{C}\right)=0, \\ \varkappa\left(\frac{f'y}{A}-\frac{\psi'y}{C}\right)+\lambda\left(\frac{\varphi'y}{B}-\frac{\psi'y}{C}\right)=0, \\ \varkappa\left(\frac{f'z}{A}-\frac{\psi'z}{C}\right)+\lambda\left(\frac{\varphi'z}{B}-\frac{\psi'z}{C}\right)=0, \\ \varkappa\left(\frac{f'p}{A}-\frac{\psi'p}{C}\right)+\lambda\left(\frac{\varphi'p}{B}-\frac{\psi'p}{C}\right)=0 \end{cases}$$

über. Diese Gleichungen bestimmen aber die Spitzen P von 4 Kegeln zweiter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve der beiden Oberflächen 2ter Ordnung

$$(20.)\quad \frac{f}{A}-\frac{\psi}{C}=0,\quad \frac{\varphi}{B}-\frac{\psi}{C}=0$$

hindurchlegen lassen. In der That: eliminirt man aus den Gleichungen (19.) die Coordinaten der Spitze P des Kegels, so erhält man eine Gleichung 4ten Grades in $\frac{\lambda}{\varkappa}$:

$$\varkappa\left(\frac{f}{A}-\frac{\psi}{C}\right)+\lambda\left(\frac{\varphi}{B}-\frac{\psi}{C}\right)=0,$$

deren Wurzeln die 4 Kegel bestimmen. Es ist hierdurch folgender Satz bewiesen:

Den 4 Schnittpuncten Π der ebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ und einer beliebigen geraden Linie entsprechen in der Curve der Kegelspitzen 4 Puncte P, welche die Spitzen von 4 durch die 7 gegebenen Puncte gelegten Kegeln 2ter Ordnung sind, die sich in einer und derselben Curve schneiden.

Da zwei von den genannten 4 Kegelspitzen die beiden anderen bestimmen, so kann man auch sagen,

dafs umgekehrt den Spitzen P von 4 Kegeln 2ter Ordnung, welche durch die 7 gegebenen Puncte hindurchgehen, 4 in einer geraden Linie liegende Puncte Π entsprechen, wenn die Kegel sich in einer und derselben Curve schneiden.

Den Schnittpuncten einer zweiten geraden Linie

$$(21.)\quad A_1\varkappa+B_1\lambda+C_1\mu=0$$

und der Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ entsprechen auf der Curve der Kegelspitzen 4 Puncte, welche die Spitzen von 4 Kegeln zweiter Ordnung sind,

die sich in der durch folgende beiden Oberflächen bestimmten Curve schneiden:

$$(22.) \qquad \frac{f}{A_1}-\frac{\psi}{C_1}=0, \quad \frac{\varphi}{B_1}-\frac{\psi}{C_1}=0.$$

Die Werthe der Coordinaten, welche den Gleichungen (20.), ebenso die, welche den Gleichungen (22.) genügen, genügen auch der Gleichung:

$$(23.) \qquad f(BC_1-B_1C)+\varphi(CA_1-C_1A)+\psi(AB_1-A_1B)=0.$$

Daher liegen die beiden Curven (20. und 21.) auf einer und derselben Oberfläche 2ter Ordnung (23,), welche durch die 7 im Raume gegebenen Puncte hindurchgeht. Diese Oberfläche bleibt ungeändert, wenn man die gerade Linie (18.) um den Schnittpunct derselben und der geraden Linie (21.) beliebig dreht. Es läfst sich also sagen: Wenn K, L, M die Coordinaten eines beliebigen Puncts π in der Ebene der Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ bezeichnen und man dreht um diesen Punct eine gerade Linie, welche die Curve in 4 Puncten Π schneidet, so sind die den 4 Schnittpuncten entsprechenden Puncte P die Spitzen von 4 durch die 7 Puncte des Raumes gehenden Kegeln 2ter Ordnung, welche sich in einer Curve schneiden, die auf der Oberfläche liegt, deren Gleichung

$$(24.) \qquad Kf+L\varphi+M\psi=0$$

ist. Diese Oberfläche wird durch die zuletzt genannte Curve erzeugt. Nimmt man die Oberfläche (24.) als gegeben an, so lassen sich unendlich viele Curven (20.) auf ihr durch die 7 Puncte gehend construiren, und jeder dieser Curven (20.) entspricht eine durch den Punct π gehende gerade Linie (18.). Wenn diese gerade Linie zur Tangente der Curve $\Delta=0$ wird, so wird die ihr entsprechende Curve einen Doppelpunct haben, indem dem Tangirungspuncte der Tangente der Doppelpunct der Curve entspricht. Es giebt also auf der Oberfläche (24.) 12 Curven (20.), welche durch die 7 Puncte hindurchgehen und einen Doppelpunct haben. Die 12 Doppelpuncte sind die Schnittpuncte der Oberfläche (24.) mit der Curve der Kegelspitzen. Der Beweis dieser Behandlung läfst sich leicht mit Hülfe des ersten Satzes des folgenden Paragraphen geben.

Die Spitzen der 4 Kegel 2ter Ordnung, welche durch die auf der Oberfläche (23.) liegende Curve (20.) gehen, bilden ein System *harmonischer Pole* der Oberfläche. Ebenso bilden die Spitzen der 4 Kegel 2ter Ordnung, welche durch die auf derselben Oberfläche (23.) liegende Curve (22.) hindurchgehen, ein System harmonischer Pole der Oberfläche. Wir haben also

zwei Systeme harmonischer Pole derselben Oberfläche 2ter Ordnung, welche sich, wie in (diesem Journal Bd. 20. p. 296) gezeigt worden ist, als die 8 Schnittpuncte dreier Oberflächen 2ter Ordnung betrachten lassen. Demnach haben wir folgenden Satz:

Den 8 Schnittpuncten Π zweier geraden Linien und der ebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen 8 Puncte P in der Curve der Kegelspitzen, welche die Schnittpuncte dreier Oberflächen 2ter Ordnung sind.

§. 4.

Die Gleichungen (6.) werden zu folgenden, wenn man sie nach den Coordinaten des Puncts P ordnet:

$$(25.)\quad \begin{cases} F'x = u_{11}x + u_{12}y + u_{13}z + u_{14}p = 0, \\ F'y = u_{21}x + u_{22}y + u_{23}z + u_{24}p = 0, \\ F'z = u_{31}x + u_{32}y + u_{33}z + u_{34}p = 0, \\ F'p = u_{41}x + u_{42}y + u_{43}z + u_{44}p = 0. \end{cases}$$

Aus je drei dieser Gleichungen ergeben sich die Verhältnisse der Coordinaten des Puncts P. Um sie bequem darzustellen, wollen wir

$$(26.)\quad \frac{\partial \Delta}{\partial u_{m,m}} = U_{m,m}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial u_{m,n}} = U_{m,n} = U_{n,m}$$

setzen, indem wir unter dem Zeichen $\frac{\partial \Delta}{\partial u_{m,n}}$ den partiellen Differentialquotienten von Δ ***nur*** nach $u_{m,n}$ genommen verstehen, unbekümmert darum, dafs $u_{m,n} = u_{n,m}$ ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man:

$$\begin{aligned} x : y : z : p &= U_{11} : U_{12} : U_{13} : U_{14} \\ &= U_{21} : U_{22} : U_{23} : U_{24} \\ &= U_{31} : U_{32} : U_{33} : U_{34} \\ &= U_{41} : U_{42} : U_{43} : U_{44}, \end{aligned}$$

woraus, wenn man durch ϱ einen unbestimmten Coëfficienten bezeichnet, folgendes, dem Systeme (6.) aequivalente System von Gleichungen hervorgeht:

$$(27.)\quad \begin{cases} x^2 = \varrho U_{11}, & y^2 = \varrho U_{22}, & z^2 = \varrho U_{33}, & p^2 = U_{44}, \\ xy = \varrho U_{12}, & yz = \varrho U_{23}, & zp = \varrho U_{34}, \\ xz = \varrho U_{13}, & yp = \varrho U_{24}, \\ xp = \varrho U_{14}. \end{cases}$$

Da die Gröfsen U in diesen 10 Gleichungen in Rücksicht auf die Coordinaten des Puncts Π homogene Functionen dritter Ordnung sind, also lineäre Ausdrücke in Rücksicht auf die 10 Producte $\varkappa^3$, λ^3, μ^3, $\varkappa^2\lambda$, $\varkappa^2\mu$, $\lambda^2\varkappa$,

$\lambda^2\mu$, $\mu^2 z$, $\mu^2\lambda$, $z\lambda\mu$, so kann man auch jene 10 Gleichungen nach diesen 10 Producten lineär auflösen, wodurch sich Gleichungen von der Form:

$$(28.)\quad \begin{cases} z^3 = V_{111}, & z^2\lambda = V_{112}, & \lambda^2 z = V_{221}, & \mu^2 z = V_{331}, \\ \lambda^3 = V_{222}, & z^2\mu = V_{113}, & \lambda^2\mu = V_{223}, & \mu^2\lambda = V_{332}, \\ \mu^3 = V_{333}, & & z\lambda\mu = V_{123}, & \end{cases}$$

ergeben, in welchen Gleichungen die Gröfsen V homogene Functionen zweiter Ordnung in Rücksicht auf die Coordinaten des Puncts P darstellen.

Es geht nun durch die Substitutionen (27.) die Gleichung einer Oberfläche 2ter Ordnung:

$$(29.)\quad \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \cdots 2\alpha_{12}xy + \cdots = 0,$$

in die Gleichung einer ebenen Curve 3ter Ordnung:

$$(30.)\quad \alpha_{11}U_{11} + \alpha_{22}U_{22} + \cdots 2\alpha_{12}U_{12} + \cdots = 0,$$

über; und umgekehrt geht durch die Substitutionen (28.) die Gleichung einer ebenen Curve 3ter Ordnung:

$$(31.)\quad \beta_{111}z^3 + \beta_{222}\lambda^3 + \cdots 3\beta_{112}z^2\lambda + \cdots 6\beta_{123}z\lambda\mu = 0,$$

in die Gleichung einer Oberfläche 2ter Ordnung:

$$(32.)\quad \beta_{111}V_{111} + \beta_{222}V_{222} + \cdots 3\beta_{112}V_{112} + \cdots 6\beta_{123}V_{123} = 0,$$

über.

Hieraus läfst sich schliefsen,

dafs den Schnittpuncten P der Curve der Kegelspitzen und einer beliebigen Oberfläche 2ter Ordnung die Schnittpuncte Π der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ und einer durch die Oberfläche bestimmten Curve 3ter Ordnung entsprechen; und dafs umgekehrt den Schnittpuncten Π der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ und einer beliebigen ebenen Curve 3ter Ordnung die Schnittpuncte P der Curve der Kegelspitzen und einer durch die Curve 3ter Ordnung bestimmten Oberfläche 2ter Ordnung entsprechen.

Da nun die Curve $\Delta = 0$ von einer Curve 3ter Ordnung in 12 Puncten geschnitten wird, so wird auch die der Curve 3ter Ordnung entsprechende Oberfläche 2ter Ordnung, sowie jede Oberfläche 2ter Ordnung, die Curve der Kegelspitzen in 12 Puncten schneiden. Aus dem eben bewiesenen Satze, ***dafs die Curve der Kegelspitzen von einer beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung in 12 Puncten geschnitten wird,*** folgt, wenn man die Oberfläche 2ter Ordnung in ein Ebenenpaar übergehen läfst, ***dafs jede Ebene die Curve***

der Kegelspitzen in 6 Puncten schneidet, was schon in dem ersten Paragraphen auf einem andern Wege bewiesen wurde.

Die Particularisirung der Gleichungen (31. und 29.) führt zu den interessantesten Resultaten.

Nehmen wir zum Beispiel an, die Gleichung der Curve dritter Ordnung (31.) sei:

$$\varkappa\lambda\mu = 0,$$

so ist die Gleichung der dieser Curve entsprechenden Oberfläche 2ter Ordnung (32.):

$$V_{123} = 0.$$

Diese Oberfläche geht also durch die 12 Puncte P hindurch, welche den Schnittpuncten Π der drei geraden Linien $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ und der Curve $\Delta = 0$ entsprechen. Die 12 Puncte P sind aber nichts anderes als die Spitzen der Kegel 2ter Ordnung, welche sich durch die Schnittcurve von je zweien der drei Oberflächen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hindurchlegen lassen. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn drei Oberflächen 2ter Ordnung gegeben sind, so schneiden sich je zwei von ihnen in einer Curve doppelter Krümmung, durch welche sich 4 Kegel 2ter Ordnung hindurchlegen lassen. Die Spitzen der 12 Kegel, welche sich durch die drei Schnittcurven der Oberflächen hindurchlegen lassen, liegen wieder auf einer Oberfläche 2ter Ordnung.

Wenn der Theil links der Gleichung (31.) ein vollständiger *Cubus* $(\beta_1\varkappa + \beta_2\lambda + \beta_3\mu)^3$ ist, so erhält man aus der Gleichung (32.) die Gleichung

$$(33.)\quad \beta_1^3 V_{111} + \beta_2^3 V_{222} + \cdots + 3\beta_1^2\beta_2 V_{112} + \cdots + 6\beta_1\beta_2\beta_3 V_{123} = 0,$$

welche mit den 3 willkürlichen Constanten β ein ganzes System von Oberflächen 2ter Ordnung darstellt, welche die Curve der Kegelspitzen vier Mal dreipunctig berühren. Man wird bemerken, dafs von diesen 4 Berührungspuncten zwei beliebig auf der Curve angenommen werden können, und dafs die beiden anderen Berührungspuncte durch die beiden ersten in der Weise bestimmt sind, dafs die 4 Kegel 2ter Ordnung, welche von den Berührungspuncten als Spitzen der Kegel durch die 7 im Raume gegebenen Puncte gelegt werden, sich in einer und derselben Curve doppelter Krümmung schneiden.

Die 8 Berührungspuncte von 2 Oberflächen aus dem genannten System lassen sich als die Schnittpuncte dreier Oberflächen 2ter Ordnung betrachten, und die 12 Berührungspuncte von 3 Oberflächen des Systems liegen auf

einer Oberfläche 2ter Ordnung. Wenn man daher durch die 8 Berührungspuncte irgend zweier Oberflächen des Systems irgend eine Oberfläche zweiter Ordnung legt, so schneidet sie die Curve der Kegelspitzen in 4 neuen Puncten, welche die Berührungspuncte einer dritten Oberfläche des Systems sind.

Unter diesen Oberflächen 2ter Ordnung giebt es auch solche, welche die Curve der Kegelspitzen zwei Mal sechspunctig berühren. Sie entsprechen den Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$. Endlich hat man noch Oberflächen 2ter Ordnung, welche die Curve der Kegelspitzen zwei Mal, das eine Mal 9punctig, das andre Mal 3punctig berühren. Sie entsprechen den Wendetangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$.

Wir wollen die sich hier aufdrängende Frage, ob aufser den genannten Oberflächen 2ter Ordnung noch andere gefunden werden können, welche die Curve der Kegelspitzen vier Mal dreipunctig berühren, unerörtert lassen, und nur bemerken, dafs sie gleichbedeutend ist mit der Frage, ob es Curven 3ter Ordnung giebt, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung vier Mal dreipunctig berühren. Da nur die Untersuchung der Curve der Kegelspitzen hier von Interesse ist, in so fern als man von den Eigenschaften dieser Curve auf entsprechende Eigenschaften der ebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ nach dem Vorhergehenden zu schliefsen berechtigt ist, so wollen wir uns damit begnügen in dem folgenden Paragraphen die Zahl der discutirten speciellen Fälle der Gleichung (31.) nur noch um einen zu vermehren, indem wir untersuchen werden, welche 8 Puncte auf der Curve der Kegelspitzen den Schnittpuncten eines Kegelschnittes und der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen.

§. 5.

Man nehme an, dafs die Gleichung (31.) die Form

$$(34.) \qquad (az + b\lambda + c\mu) F(z\lambda\mu) = 0$$

haben, in welcher Gleichung $F(z\lambda\mu)$ eine homogene Function 2ter Ordnung bedeutet. Unter dieser Voraussetzung zerfällt die Curve 3ter Ordnung (31.) in einen *Kegelschnitt* $F(z\lambda\mu) = 0$ und in eine *gerade Linie* $az + b\lambda + c\mu = 0$. Durch Substitution der Producte der Variabeln aus (28.) in der entwickelten Gleichung (34.) geht dieselbe in eine Gleichung von der Form:

$$v_{11}x^2 + v_{22}y^2 + \cdots 2v_{12}xy + \cdots = 0$$

über, in welcher die Coëfficienten v lineäre homogene Ausdrücke der Gröfsen a, b, c sind. Es stellt sich die zuletzt genannte Gleichung, nach diesen Gröfsen

geordnet, wie folgt dar:

$$(35.) \qquad aA + bB + cC = 0.$$

In dieser Gleichung bezeichnen A, B, C, in Rücksicht auf die Variabeln x, y, z, p, homogene Functionen 2ter Ordnung, welche allein von der Function $F(x\lambda\mu)$ abhangen. Aus diesem Grunde stellt die Gleichung (35.), wenn man darin a, b, c variiren läfst, ein ganzes System von Oberflächen 2ter Ordnung dar, welche sämmtlich durch die 8 Puncte der Curve der Kegelspitzen hindurchgehen, die den 8 Schnittpuncten des Kegelschnittes $f(x\lambda\mu)=0$ und der Curve 4ter Orduung $\Delta=0$ entsprechen. Die 8 Puncte, durch welche alle jene Oberflächen hindurchgehen, sind aber die Schnittpuncte der drei Oberflächen 2ter Ordnung $A=0$, $B=0$, $C=0$. Man kann daher den am Ende des (§. 5) angegebenen Satz wie folgt vervollständigen:

Den 8 Schnittpuncten Π eines Kegelschnitts und einer ebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ entsprechen 8 Puncte P auf der Curve der Kegelspitzen, welche die Schnittpuncte dreier Oberflächen 2ter Ordnung sind.

§. 6.

Die Particularisirung der Gleichung (29.) leitet auf Eigenschaften der ebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ hin. In der That: nehmen wir an, der Theil links der Gleichung (29.) sei ein vollständiges Quadrat $(\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4 p)^2$, so erhält man aus der Gleichung (30):

$$36. \qquad \alpha_1^2 U_{11}+\alpha_2^2 U_{22}+\cdots\cdots+2\alpha_1\alpha_2 U_{12}+\cdots\cdots=0,$$

die Gleichung mit den 4 willkürlichen Constanten eines ganzen Systems von *Berührungscurven* 3ter Ordnung, welche die Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ sechs Mal berühren. Die Berührungspuncte sind nämlich die den 6 Schnittpuncten P der Ebene $\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4 p=0$, welche wir mit α bezeichnen wollen, und der Curve der Kegelspitzen entsprechenden Puncte Π der Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$.

Da von den 6 Schnittpuncten P der Ebene α und der Curve der Kegelspitzen 3 beliebig angenommen werden können, wodurch die 3 anderen bestimmt sind, so können auch von den Berührungspuncten der Curve (36.) und der Curve $\Delta=0$ 3 Berührungspuncte auf der letzteren Curve beliebig angenommen werden, durch welche die 3 anderen bestimmt sind; was sich auch aus der Zahl der willkürlichen Constanten in der Gleichung (36.) nachweisen läfst.

Die 6 Berührungspuncte der Berührungscurve 3ter Ordnung liegen nicht in einem Kegelschnitt.

Denn wenn sich durch die 6 Berührungspuncte ein Kegelschnitt hindurchlegen liefse, so würde er die Curve 4ter Ordnung in 8 Puncten schneiden, deren entsprechende P, nach dem Satze des vorhergehenden Paragraphen, die 8 Schnittpuncte dreier Oberflächen zweiter Ordnung sind. Da aber 6 von diesen Schnittpuncten in der bezeichneten Ebene α liegen, so können diese nicht als Schnittpuncte von 3 Oberflächen 2ter Ordnung betrachtet werden.

Eine andere Berührungscurve dieses Systems wird zur Gleichung

$$(37.) \quad \gamma_1^2 U_{11} + \gamma_2^2 U_{22} + \cdots + 2\gamma_1\gamma_2 U_{12} + \cdots = 0$$

haben, auf gleiche Weise der Ebene $\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 p = 0$ entsprechend. Da nun die genannten beiden Ebenen, mit einander verbunden, eine Oberfläche 2ter Ordnung:

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 p)(\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 p) = 0,$$

darstellen, welche durch die 12 den Berührungspuncten Π von (36. und 37.) entsprechenden Puncte P der Curve der Kegelspitzen hindurchgeht, so wird auch die dieser Oberfläche entsprechende Curve 3ter Ordnung:

$$(38.) \quad \alpha_1\gamma_1 U_{11} + \alpha_2\gamma_2 U_{22} + \cdots + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) U_{12} + \cdots = 0,$$

durch die 12 Berührungspuncte von (36. und 37.) hindurchgehen. Es ist hierin der Beweis des folgenden Satzes zu erkennen.

Wenn man durch die 6 Berührungspuncte einer Berührungscurve einer gegebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ eine beliebige Curve 3ter Ordnung hindurchlegt, so schneidet sie die gegebene Curve 4ter Ordnung in noch 6 Puncten, in welchen eine andere, demselben System angehörige Berührungscurve die gegebene Curve 4ter Ordnung berührt.

Es ist noch zu bemerken,

dafs die Berührungspuncte zweier Berührungscurven desselben Systems auf einer Curve 3ter Ordnung liegen.

Unter den Berührungscurven giebt es auch solche, welche die Curve 4ter Ordnung 3 Mal 4punctig berühren. Die Berührungspuncte entsprechen den Berührungspuncten einer Ebene, welche die Curve der Kegelspitzen in 3 verschiedenen Puncten berührt. Die Berührungspuncte zweier solcher Curven sind zugleich die Berührungspuncte einer Berührungscurve, welche aber nicht demselben Systeme angehört, da ihre Berührungspuncte nicht den Schnitt-

puncten einer Ebene und der Curve der Kegelspitzen, sondern zweier Ebenen entsprechen.

Bezeichnet man die negativen Theile links der Gleichungen (36, 37 u. 38.) respective mit a, b, c, so lassen sich dieselben wie folgt ausdrücken:

$$(39.)\quad a = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \gamma_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \gamma_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$b = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix},$$

und man hat, wie ich in der vorhergehenden Abhandlung „Über die Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie" durch die Gleichung (8.)* gezeigt habe:

$$(40.)\quad \Delta U = ac - b^2,$$

aus welcher identischen Gleichung ich in der genannten Abhandlung den zuletzt aufgestellten Satz abgeleitet habe.*)

Es tritt uns hier die Frage entgegen, ob das aufgestellte System von Berührungscurven das einzige sei, welches die Curve 4ter Ordnung aufzuweisen hat, oder ob aufser ihm noch andere existiren. Man wird leicht sehen, dafs diese Frage mit der Frage nach den verschiedenen Functionen F, deren Determinanten entwickelt dieselbe homogene Function Δ der 4ten Ordnung sind, gleichbedeutend ist. Durch lineäre Substitutionen von der Form (11.) geht die in (8.) gegebene Function F zwar in eine neue über, wie sie in (12.) dargestellt ist, allein die Determinante dieser neuen Function ist von der Determinante der ersten unentwickelt nur durch einen Factor verschieden, wie es die Gleichung (17.) beweiset, und die Gleichungen der Berührungscurven, welche sich von den beiden Functionen F auf die beschriebene Weise ableiten lassen, unterscheiden sich, wie es die identische Gleichung (11.)* in

*) Die folgenden Citate mit dem Zeichen * beziehen sich auf meine Abhandlung „Über die Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie." (S. 243 d. Bandes.)

der citirten Abhandlung beweiset, nur durch einen constanten Factor. Da also zwei Functionen F auf dasselbe System Berührungscurven führen, wenn die beiden Functionen durch lineäre Substitutionen von der Form (11.) auf einander zurückgeführt werden können, so werden wir zwei Functionen F von der beschriebenen Art nicht als verschiedene Functionen zu betrachten haben.

Es mag hier genügen, auf die Frage nach den verschiedenen Functionen F, deren Determinanten dieselbe homogene Function Δ der 4ten Ordnung sind, aufmerksam gemacht zu haben. Die Beantwortung dieser Frage soll in den zunächst folgenden Paragraphen vorbereitet werden.

§. 7.

Unter den Oberflächen, welche, wie wir gesehen haben, die Curve der Kegelspitzen in 12 Puncten schneiden, verdienen die Oberflächen, welche durch die 7 im Raume gegebenen Puncte hindurchgehen, einer besondern Erwähnung. Bezeichnet man durch K, L, M die Coordinaten eines beliebigen Puncts π in der Ebene der betrachteten Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, so ist die allgemeinste Form der Gleichung jener Oberflächen:

$$(41.) \qquad Kf + L\varphi + M\psi = 0.$$

Wir wollen nun untersuchen, in welche Gleichung die angegebene Gleichung durch die Substitutionen (27.) übergeht.

Zu diesem Zwecke differentiire man die Gleichung (9.) nach z, welches

$$\frac{d\Delta}{dz} = \frac{\partial\Delta}{\partial u_{11}}\frac{du_{11}}{dz} + \frac{\partial\Delta}{\partial u_{22}}\frac{du_{22}}{dz} + \frac{\partial\Delta}{\partial u_{12}}\frac{du_{12}}{dz} + \frac{\partial\Delta}{\partial u_{21}}\frac{du_{21}}{dz} + \cdots,$$

und, mit Rücksicht auf (26.),

$$\frac{d\Delta}{dz} = U_{11}\frac{du_{11}}{dz} + U_{22}\frac{du_{22}}{dz} + U_{12}\frac{du_{12}}{dz} + U_{21}\frac{du_{21}}{dz} + \cdots$$

giebt. Substituirt man in dieser Gleichung für die Gröfsen U ihre Werthe aus (27.), so erhält man:

$$\frac{d\Delta}{dz} = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{du_{11}}{dz}x^2 + \frac{du_{22}}{dz}y^2 + 2\frac{du_{12}}{dz}xy + \cdots\right\}.$$

Bemerkt man nun, dafs der mit $\frac{1}{\varrho}$ multiplicirte Theil der Gleichung nach (8.) der partielle Differentialquotient von $2F$ nach z genommen ist, insofern diese Gröfse z in den Coëfficienten u der Function $2F$ enthalten ist, so hat man, mit Rücksicht auf (2.):

$$\frac{d\Delta}{dk} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial 2F}{\partial z} = \frac{1}{\varrho}\cdot f.$$

Auf diese Weise ergiebt sich durch Differentiation von (9.) nach x, λ, μ:

$$(42.) \qquad \frac{d\Delta}{dx} = \frac{1}{\varrho}\cdot f, \qquad \frac{d\Delta}{d\lambda} = \frac{1}{\varrho}\cdot \varphi, \qquad \frac{d\Delta}{d\mu} = \frac{1}{\varrho}\cdot \psi.$$

Setzt man diese Werthe von f, φ, ψ endlich in die Gleichung (41.), so geht dieselbe, mit Weglassung des Factors ϱ, in

$$(43.) \qquad K\frac{d\Delta}{dx} + L\frac{d\Delta}{d\lambda} + M\frac{d\Delta}{d\mu} = 0$$

über. Dies ist bekanntlich die Gleichung der Curve 3ter Ordnung, welche die Curve der 4ten Ordnung $\Delta = 0$ in den Berührungspuncten der von dem Puncte π an die Curve gezogenen Tangenten schneidet. Wir haben demnach folgende Sätze:

Den 12 Schnittpuncten P einer Oberfläche 2ter Ordnung, welche durch die 7 im Raume gegebenen Puncte gelegt ist, und der Curve der Kegelspitzen, entsprechen in der ebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ die Berührungspuncte Π der von einem durch die Oberfläche bestimmten Puncte π an die Curve gelegten Tangenten.

Den 12 Berührungspuncten Π der von einem beliebigen Puncte π an die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ gezogenen Tangenten entsprechen auf der Curve der Kegelspitzen 12 Puncte P, welche auf einer durch die 7 gegebenen Puncte gelegten und durch den Punct π näher bestimmten Oberfläche 2ter Ordnung liegen.

§. 8.

Wenn in der in (15.) angegebenen Determinante ∇ die Elemente F_{11}, F_{22}, F_{12} verschwinden, so wird dieselbe zu einem vollständigen Quadrat

$$(44.) \qquad D^2 = \begin{vmatrix} F_{13} & F_{14} \\ F_{22} & F_{24} \end{vmatrix}^2.$$

Wir werden uns dieses Umstandes bedienen, um die Gleichungen der Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ abzuleiten.

Über die Coëfficienten in den Substitutionen (11.) sind in dem Vorhergehenden keine Bestimmungen gemacht worden. Betrachten wir dieselben als die Coordinaten von 4 Puncten des Raumes 1, 2, 3, 4, indem wir annehmen, dafs die Coëfficienten mit dem Index 1 dem ersten dieser 4 Puncte entsprechen, etc., so steht es frei, diesen Puncten bestimmte Lagen im Raume anzuweisen, wodurch die Coëfficienten in den Substitutionen (11.) eben bestimmt werden. Wir wollen annehmen, dafs die Puncte 1 und 2 zwei von

den 8 Schnittpuncten der 3 Oberflächen f, φ und ψ seien. Unter dieser Annahme verschwinden die Elemente F_{11} und F_{22} der Determinante ∇, weil die Coëfficienten von z, λ, μ in den genannten Elementen verschwinden, und die Gleichung der Curve 4ter Ordnung nimmt die Gestalt

$$(45.) \qquad r^2 \Delta = \nabla = \begin{vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix} = 0$$

an. Es ist nun

$$F_{12} = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 4 Puncten schneidet. Die Coordinaten der 4 Schnittpuncte genügen der Gleichung (45.) und der Gleichung $F_{12} = 0$. Sie genügen auch den genannten beiden Gleichungen, wenn man in den ersteren $F_{12} = 0$ setzt. Sie genügen mithin den beiden Gleichungen

$$D^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_{12} = 0;$$

das heifst, sie fallen paarweise zusammen. Eine gerade Linie, welche die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 4 Puncten schneidet, die paarweise zusammenfallen, nennt man aber eine ***Doppeltangente*** der Curve. Es ist mithin die Gleichung $F_{12} = 0$ die Gleichung einer ***Doppeltangente*** der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, und $D = 0$ ist die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher durch die Berührungspuncte der Doppeltangente hindurchgeht.

Es läfst sich auch die Lage der den Berührungspuncten Π der genannten Doppeltangente der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechenden Punte P in der Curve der Kegelspitzen näher bezeichnen. Legt man nämlich durch die Puncte 1, 2, in welchen sich der Annahme nach die drei Oberflächen f, φ, ψ schneiden, eine gerade Linie, so schneidet dieselbe die Curve der Kegelspitzen in zwei Puncten P, welche den Berührungspuncten Π der Doppeltangente entsprechen. Diese Behauptung werden wir durch die folgende Betrachtung rechtfertigen.

Die Coordinaten eines beliebigen Puncts der geraden Linie (12.) sind bekanntlich:

$$x_1 + \varrho x_2, \quad y_1 + \varrho y_2, \quad z_1 + \varrho z_2, \quad p_1 + \varrho p_2.$$

Setzt man diese für x, y, z, p in die Gleichungen (6.), so erhält man:

$$\begin{aligned} u &= F'x_1 + \varrho F'x_2 = 0, \\ v &= F'y_1 + \varrho F'y_2 = 0, \\ w &= F'z_1 + \varrho F'z_2 = 0, \\ r &= F'p_1 + \varrho F'p_2 = 0. \end{aligned}$$

Es wird nun zu beweisen sein, dafs diesen 4 Gleichungen genügt werden kann; oder, was dasselbe ist, dafs dem folgenden Systeme genügt wird:

$$\begin{aligned} x_1u + y_1v + z_1w + p_1r &= 0, \\ x_2u + y_2v + z_2w + p_2r &= 0, \\ x_3u + y_3v + z_3w + p_3r &= 0, \\ x_4u + y_4v + z_4w + p_4r &= 0. \end{aligned}$$

Den beiden ersten von diesen Gleichungen wird genügt, weil F_{11}, F_{22} und F_{12} verschwinden. Die folgende Gleichung, welche $F_{13} + \varrho F_{23} = 0$ ist, bestimmt den Werth von ϱ, und die letzte Gleichung $F_{14} + \varrho F_{24} = 0$ wird erfüllt, weil $D = 0$ ist. Da aber den Gleichungen $D = 0$ und $F_{12} = 0$ zwei Mal genügt wird, so hat auch ϱ zwei Werthe, das heifst, die gerade Linie 12 schneidet die Curve der Kegelspitzen in zwei verschiedenen Puncten. Demnach haben wir folgenden Satz:

Wenn man zwei von den 8 Schnittpuncten der drei Oberflächen 2ter Ordnung f, φ, ψ durch eine gerade Linie verbindet, so schneidet dieselbe die Curve der Kegelspitzen in zwei Puncten P, welche den Berührungspuncten Π einer Doppeltangente der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen.

Bezeichnet man nun die 8 Schnittpuncte der drei Oberflächen f, φ, ψ mit den Zahlen 1, 2, ... 8 und verbindet irgend zwei derselben p, q durch eine gerade Linie, so schneidet diese Linie die Curve der Kegelspitzen in zwei Puncten P, deren entsprechende Puncte Π auf der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ die Berührungspuncte der durch die Gleichung:

$$(46.) \qquad F_{pq} = 0$$

dargestellten Doppeltangente der Curve 4ter Ordnung sind.

Wir werden in dem Folgenden sagen, die gerade Linie pq, welche die Schnittpuncte p, q der 3 Oberflächen f, φ, ψ verbindet, entspreche der Doppeltangente $F_{pq} = 0$, welche wir der Kürze wegen mit demselben Zeichen pq hezeichnen werden. Man wird aus dieser Beziehung nicht Anlafs nehmen zu glauben, dafs den geraden Linien pq, welche durch denselben Punct des Raumes gehen, Doppeltangenten pq entsprechen, welche sich in

einem und demselben Puncte der Ebene schneiden. Jene geraden Linien pq entsprechen solchen Doppeltangenten pq, welche ganz andere Eigenschaften haben.

Die Zahl der geraden Linien, welche je zwei von den 8 Schnittpuncten der drei Oberflächen f, φ, ψ verbinden, beträgt 28. Ihnen entsprechen also die 28 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung, welche, wie bekannt, eine solche Curve darbietet.

Man ist nach dem Vorhergehenden im Stande, die Gleichungen der Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ einzeln abzuleiten, wenn Δ als eine symmetrische Determinante von der Form (9.) gegeben ist. Denn kennt man die Elemente u dieser Determinante, so läfst sich aus ihnen die in (8.) aufgeführte Function $2F$ componiren, in welcher die Coëfficienten von $\varkappa$, λ, μ die Functionen f, φ, ψ sind. Zur Bildung der Gleichungen der Doppeltangenten brauchen wir noch die Coordinaten der 8 Schnittpuncte der 3 Oberflächen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, welche man durch Auflösung einer Gleichung vom 8ten Grade erhält.

Demnach führt das Problem der Doppeltangenten auf die Transformation eines gegebenen Ausdrucks 4ter Ordnung von 3 Variabeln in die Form einer symmetrischen Determinante Δ mit lineären Elementen, und demnächst auf die Auflösung einer Gleichung vom 8ten Grade.

Das Product $\Pi(F_{pq})$ sämmtlicher Functionen F_{pq} ist eine symmetrische Function der Wurzeln der drei Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Drückt man diese symmetrische Function durch die Coëfficienten in den genannten drei Gleichungen aus, so erhält man $\Pi(F_{pq}) = 0$: die Gleichung des Systems sämmtlicher Doppeltangenten der gegebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$.

§. 9.

Aus den Gleichungen von 6 Doppeltangenten, welche den 6 Kanten eines Tetraëders entsprechen, dessen Ecken 4 Schnittpuncte 1, 2, 3, 4 der drei Oberflächen f, φ, ψ sind, läfst sich die Gleichung der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ ableiten.

In dem vorhergehenden Paragraph wurde nachgewiesen, dafs der Kegelschnitt $D = 0$ die Doppeltangente 12 in den Berührungspuncten schneidet. Bemerkt man nun, dafs D ungeändert bleibt, wenn 1 mit 3 und gleichzeitig 2 mit 4 vertauscht werden, so darf man hieraus schliefsen, dafs der Kegelschnitt

$$D = F_{13}F_{24} - F_{23}F_{14} = 0$$

durch die 4 Berührungspuncte der beiden Doppeltangenten 12 und 34 hindurchgeht. Die Form der Gleichung des Kegelschnitts zeigt ferner, dafs die Doppeltangentenpaare 13, 24 und 23, 14 die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks bilden, durch dessen Ecken ebenfalls der Kegelschnitt hindurchgeht. Wir haben demnach folgenden Satz:

Wenn 3 Doppeltangentenpaare gegeben sind, deren entsprechende Linien die gegenüberliegenden Kanten eines Tetraëders bilden, so geht durch die Berührungspuncte des einen Doppeltangentenpaares und durch die Ecken des durch die beiden andern Doppeltangentenpaare gebildeten Vierecks ein- und derselbe Kegelschnitt.

Durch die Berührungspuncte des Doppeltangentenpaares 12, 34, durch welche der Kegelschnitt $D = 0$ hindurchgeht, läfst sich ein ganzes System von Kegelschnitten hindurchlegen:

$$F_{12}F_{34} + \varrho(F_{13}F_{24} - F_{23}F_{14}) = 0.$$

Unter diesen Kegelschnitten zeichnet sich der Kegelschnitt w aus, in dessen Gleichung die willkürliche Constante ϱ den Werth -1 hat, nämlich:

$$w = F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} - F_{13}F_{24} = 0.$$

Diese Gleichung bleibt ungeändert, wenn man 2 mit 4 vertauscht. Daraus folgt, dafs der Kegelschnitt durch die Berührungspuncte der beiden Doppeltangentenpaare 12, 34 und 14, 23 hindurchgeht. Wir finden auf diese Weise drei Kegelschnitte u, v, w, nämlich

$$\begin{aligned} u &= -F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} + F_{13}F_{24} = 0, \\ v &= +F_{12}F_{34} - F_{23}F_{14} + F_{13}F_{44} = 0, \\ w &= +F_{12}E_{34} + F_{23}F_{14} - F_{13}F_{24} = 0, \end{aligned}$$

von denen der Kegelschnitt u durch die Berührungspuncte der Doppeltangentenpaare 13, 14 und 13, 24 hindurchgeht. Der Kegelschnitt v geht durch die Berührungspuncte der Doppeltangentenpaare 12, 34 und 13, 24; und der Kegelschnitt w geht durch die Berührungspuncte der Doppeltangentenpaare 12, 34 und 23, 14 hindurch. Hierdurch erhellet nachstehender Satz:

Durch die Berührungspuncte von 4 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ läfst sich ein Kegelschnitt legen, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein räumliches Viereck bilden.

Der Kegelschnitt u geht durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten 23.14.24.13 hindurch. Es sind daher:

$$u^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_{23}.F_{14}.F_{24}.F_{13} = 0$$

die Gleichungen zweier Curven 4ter Ordnung, welche sich in 16 Puncten schneiden, durch welche auch die Curve $\Delta = 0$ hindurchgeht. Es müssen sich also zwei Factoren r^2 und ϱ finden lassen, von der Gestalt, dafs:

$$r^2\Delta = u^2 - \varrho F_{23}F_{14}F_{24}F_{13}$$

ist. Da dieser Ausdruck sich aber auf gleiche Weise aus v^2 und $F_{12}F_{34}F_{24}F_{13}$ und aus w^2 und $F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}$ zusammensetzen lassen mufs, so zeigt sich, dafs $\varrho = 4$ sein mufs. Man erhält also, indem man für u und ϱ ihre Werthe setzt und entwickelt:

$$(47.)\quad \nabla = r^2\Delta = F_{12}^2F_{34}^2 + F_{23}^2F_{14}^2 + F_{13}^2F_{24}^2 - 2F_{23}F_{14}F_{13}F_{24} - 2F_{13}F_{24}F_{23}F_{14} - 2F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}:$$

ein Ausdruck, der sich auch unmittelbar durch Entwickelung der in (15.) angegebenen Determinante ∇ ergiebt, wenn man berücksichtigt, dafs

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$$

ist. Setzt man diesen Ausdruck gleich 0, so haben wir die Gleichung der Curve 4ter Ordnung aus den Gleichungen der 6 Doppeltangenten componirt.

Es ist noch zu bemerken, dafs der Ausdruck $r^2\Delta$ sich auch aus u, v, w auf die Weise zusammensetzen läfst, dafs:

$$r^2\Delta = rw + wu + uv;$$

was geometrisch auch daraus ersichtlich ist, dafs die genannten 3 Kegelschnitte u, v, w sich gegenseitig nur in den Berührungspuncten der 6 Doppeltangenten schneiden.

§. 10.

Nachdem in (§. 8.) die Lage der Puncte P auf der Curve der Kegelspitzen bestimmt worden, welche den Berührungspuncten Π der Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen, wollen wir nun, mit Rücksicht auf diese Bestimmung, mit der in Paragraph (6.) angefangenen Particularisirung fortfahren.

Wir sahen, wie den 6 Schnittpuncten P einer beliebigen Ebene α und der Curve der Kegelspitzen die 6 Berührungspuncte Π einer Berührungscurve entsprechen. Wenn man die Ebene α durch zwei von den 8 Schnittpuncten der drei Oberflächen f, φ, ψ hindurchgehen läfst, so wird die dieser

Ebene entsprechende Berührungscurve dritter Ordnung in eine Doppeltangente zerfallen, welche der die genannten beiden Puncte verbindenden geraden Linie L entspricht, und in einen *Berührungskegelschnitt*. In der That: da der Ebene α in unserem Falle eine Curve dritter Ordnung entspricht, welche die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 12 Puncten schneidet, von denen 4 in der der geraden Linie L entsprechenden Doppeltangente liegen, so müssen die übrigen Schnittpuncte in einem Kegelschnitt liegen. Dreht man nun die Ebene α um die Linie L herum, so erhält man auf diese Weise ein ganzes System von Berührungskegelschnitten.

Dies läfst sich analytisch verfolgen, wenn man von der in (39.) gegebenen Gleichung der Berührungscurve dritter Ordnung:

$$a = 0,$$

ausgeht. Multiplicirt man diese Gleichung mit r^2, so erhält man nach der unter (11.)* angegebenen identischen Gleichung:

$$(48.) \qquad ar^2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & A_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & A_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & A_3 \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher Gleichung der Kürze wegen

$$A_q = \alpha_1 x_q + \alpha_2 y_q + \alpha_3 z_q + \alpha_4 p_q$$

gesetzt ist. Entwickelt man die angegebene Determinante unter Berücksichtigung dafs $F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$ ist, so erhält man:

$$(49.) \quad -\frac{ar^2}{2} = A_1^2 F_{23} F_{24} F_{34} + A_2^2 F_{13} F_{14} F_{34} + A_3^2 F_{12} F_{14} F_{24} + A_4^2 F_{12} F_{13} F_{23}$$
$$- \{A_1 A_2 F_{34} + A_3 A_4 F_{12}\}\{-F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}\}$$
$$- \{A_1 A_4 F_{23} + A_2 A_3 F_{14}\}\{+F_{12} F_{34} - F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}\}$$
$$- \{A_1 A_3 F_{24} + A_2 A_4 F_{13}\}\{+F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} - F_{13} F_{24}\}.$$

Wenn nun die Ebene α durch die Puncte 1 und 2 hindurchgeht, so verschwinden die Constanten A_1 und A_2 und die Gleichung der Berührungscurve nimmt die Gestalt

$$F_{12}\{A_3^2 F_{14} F_{24} - A_3 A_4(-F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}) + A_4^2 F_{13} F_{23}\} = 0$$

an; woraus ersichtlich ist, dafs die genannte Curve in die Doppeltangente 12 und in einen Berührungskegelschnitt zerfällt, dessen Gleichung

$$(50.) \quad A_3^2 F_{14} F_{24} - A_3 A_4(-F_{12} F_{34} + F_{23} F_{14} + F_{13} F_{24}) + A_4^2 F_{13} F_{23} = 0$$

ist. Der Theil links dieser Gleichung läfst sich in der Form einer Determinante darstellen. Setzt man nämlich:

$$(51.)\quad -F_{14}F_{24} = v_{44},\quad -F_{13}F_{23} = v_{33},\quad -F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} + F_{13}F_{24} = v_{34},$$

so stellt sich die Gleichung (50.) so dar:

$$(52.)\quad \begin{vmatrix} v_{33} & v_{34} & A_3 \\ v_{43} & v_{44} & A_4 \\ A_3 & A_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieses ist also die Gleichung eines Systems von Berührungskegelschnitten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, mit den willkürlichen Constanten A_3, A_4.

Man wird bemerken, dafs der Theil links dieser Gleichung in zwei lineäre Factoren $F_{13}F_{23}$ zerfällt, also a in die drei lineäre Factoren $F_{12}F_{13}F_{23}$, wenn $A_3 = 0$ ist, das heifst, wenn die Ebene α durch drei Puncte 1, 2, 3 hindurchgeht. Wie oft also die Ebene α durch drei von den 8 Puncten 1 2 ... 8 gelegt werden kann, so oft zerfällt der Ausdruck a in drei lineäre Factoren. Es lassen sich aber 8 Puncte zu dreien 56 Mal combiniren. Daher wird die Berührungscurve 56 Mal in drei Doppeltangenten zerfallen, oder, analytisch ausgedrückt, der in (39.) gegebene Ausdruck a wird durch specielle Annahme der in ihm steckenden Constanten α sich auf 56 Arten in drei lineäre Factoren zerlegen lassen, was ich in (§. 8.)* nur historisch mitgetheilt habe und wovon nun hier der Beweis vorliegt.

Wenn man durch die 4 Berührungspuncte eines Berührungskegelschnittes der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ einen anderen Kegelschnitt legt, so schneidet er die Curve in noch 4 Puncten, in welchen ein zweiter, demselben System zugehöriger Kegelschnitt die Curve berührt. Die 8 Berührungspuncte zweier Berührungskegelschnitte desselben Systems liegen wieder auf einem Kegelschnitt.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem zweiten des (§. 6.). Betrachtet man nämlich den Kegelschnitt (52.) und die Doppeltangente 12 als eine Berührungscurve dritter Ordnung, und legt durch die Berührungspuncte eine Curve dritter Ordnung, welche in die Doppeltangente 12 und in einen Kegelschnitt zerfällt, so sind die 6 neuen Schnittpuncte die Berührungspuncte einer Curve dritter Ordnung, bestehend aus der Doppeltangente 12 und einem neuen Berührungskegelschnitt.

Es ist leicht zu sehen, dafs die Bedingungsgleichung zwischen den willkürlichen Constanten A_3, A_4, welche erfüllt werden mufs, wenn der Theil

links der Gleichung (52.) in lineäre Factoren zerfallen soll, eine homogene Gleichung 6ten Grades ist. Hieraus folgt, dafs das betrachtete System von Berührungskegelschnitten 6 Paare Doppeltangenten enthält.

Nach den vorausgeschickten Erwägungen sind wir im Stande diese Doppeltangentenpaare des in Rede stehenden Systems von Berührungskegelschnitten näher zu bezeichnen. Es sind folgende Doppeltangentenpaare:

12.23 14.24 15.25 16.26 17.27 18.28.

Durch die 8 Berührungspuncte von irgend zwei Paaren dieser Doppeltangenten läfst sich nach dem vorhergehenden Satze ein Kegelschnitt legen; woraus wiederum der letzte Satz des vorhergehenden Paragraphen hervorgeht. Dieser Satz giebt Combinationen von drei Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnuug $\Delta = 0$, durch deren Berührungspuncte sich ein Kegelschnitt legen läfst. Aus dem ersten Satze des (§. 6.) können wir Combinationen von 3 Doppeltangenten herleiten, durch deren Berührungspuncte sich kein Kegelschnitt legen läfst. In der That: da die Doppeltangenten

12 23 31,

wie man sahe, eine Berührungscurve des betrachteten Systems $a = 0$ bilden, so läfst sich durch ihre 6 Berührungspuncte kein Kegelschnitt legen. Solcher Combinationen giebt es 56. Man kann also sagen:

Durch die Berührungspuncte von drei Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ läfst sich kein Kegelschnitt legen, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein Dreieck bilden.

Betrachtet man die 6 Doppeltangenten:

12 23 31 45 56 64,

oder die 6 Doppeltangenten:

12 23 31 45 34 35,

so bilden die 3 ersten eine Berührungscurve $a = 0$ und die 3 letzten ebenfalls eine solche Berührungscurve. Nach dem letzten Satze des (§. 6.) läfst sich durch die Berührungspuncte zweier Berührungscurven eine Curve dritter Ordnung hindurchlegen. Mithin liegen die Berührungspuncte der genannten 6 Doppeltangenten auf einer Curve dritter Ordnung. Dieses läfst sich allgemeiner so ausdrücken:

Die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn die den 6 Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien zwei gesonderte

Dreiecke bilden, oder wenn sie zwei Dreiecke bilden, welche eine Ecke gemein haben.

Wir haben nur des einen Systems von Berührungskegelschnitten erwähnt, welches sich aus dem betrachteten System von Berührungscurven dritter Ordnung ergab, in dem wir die Ebene α, welche die den Berührungspuncten Π der Berührungscurve entsprechenden Puncte P enthielt, um die gerade Linie 12 herumdrehten. Da aber 28 gerade Linien pq vorhanden sind, so erhalten wir auf gleiche Weise durch Umdrehung der Ebene α um diese 28 geraden Linien 28 verschiedene Systeme von Berührungskegelschnitten, welche alle aus dem einen Systeme von Berührungscurven hervorgehen.

§. 11.

In dem (§. 9.)* findet sich die Existenz von 28 Systemen von Berührungscurven dritter Ordnung nachgewiesen, welche eine gegebene Curve 4ter Ordnung in 6 verschiedenen Puncten berühren, die in einem Kegelschnitt liegen; desgleichen finden sich Eigenschaften dieser Curven entwickelt. Wir vermögen jetzt die Gleichungen dieser Curven selbst abzuleiten.

Zu dem Ende entnehmen wir aus dem Paragraph (9.) die identische Gleichung:

$$-\nabla = -r^2\Delta = 4F_{23}F_{14}F_{24}F_{13} - u^2,$$

deren Theil rechts sich als Determinante darstellt, so dafs man

$$-\nabla = -r^2\Delta = \begin{vmatrix} F_{23} & u \\ u & 4F_{14}F_{24}F_{13} \end{vmatrix}$$

hat. Die Elemente F_{23}, u, $4F_{14}F_{24}F_{13}$ in dieser Determinante sind Functionen respective vom 1ten, 2ten und 3ten Grade in Rücksicht auf die Coordinaten des Punctes Π. Bezeichnet man nun durch a, b, c die Ausdrücke:

$$(53.) \qquad a = F_{23}, \quad b = u - F_{23}m, \quad c = 4F_{14}F_{24}F_{13} - 2um + F_{23}m^2,$$

so erhält man die identische Gleichung

$$(54.) \qquad -\nabla = -r^2\Delta = ac - b^2.$$

Aus der Form dieser identischen Gleichung zeigt sich, wenn man m eine beliebige lineäre Function der Coordinaten des Punctes Π bedeuten läfst, dafs $c = 0$ ein ganzes System von Curven 3ter Ordnung darstellt, welche die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 6 verschiedenen Puncten berühren, durch welche der Kegelschnitt $b = 0$ hindurchgeht, der die Curve 4ter Ordnung überdies in den Berührungspuncten der Doppeltangente 23 schneidet.

Der Ausdruck c zerfällt in drei lineäre Factoren, wenn $m = 0$ ist. Man kann im Allgemeinen die 3 in m steckenden Constanten, so dafs c in drei lineäre Factoren zerfällt, auf so viele Arten bestimmen, als sich Combinationen von drei Doppeltangenten finden lassen, deren Berührungspuncte mit den Berührungspuncten der Doppeltangente 23 in einem Kegelschnitt $b = 0$ liegen. Diese Combinationen finden sich auf folgende Art. Man suche die von den, den Doppeltangenten entsprechenden, geraden Linien gebildeten räumlichen Vierecke, welche die Seite 23 gemein haben. Ihre Zahl beträgt 30. Mithin giebt es 30 Combinationen von der beschriebenen Art. Es finden sich ferner 15 andere Combinationen unter der Voraussetzung des Satzes „dafs die Berührungspuncte von 4 Doppeltangenten in einem Kegelschnitt liegen, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien die Puncte 12...8 paarweise verbinden": eines Satzes, dessen Beweis am Ende des (§. 12.) gegeben werden wird. Denn es giebt 15 Systeme von drei geraden Linien, welche die 6 Puncte 1, 4, 5, 6, 7, 8 paarweise verbinden. Wir haben also im Ganzen 45 Combinationen von drei Doppeltangenten von der oben bezeichneten Art. Es läfst sich mithin c eben so oft in drei lineäre Factoren zerlegen. Diese Angabe findet man in (§. 9.)* ohne Beweis aufgeführt.

§. 12.

Das Problem der Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung verlangt, wie sich in (§. 8.) zeigte, die Transformation eines gegebenen homogenen Ausdrucks 4ter Ordnung von 3 Variabeln in die Form einer symmetrischen Determinante mit lineären Elementen, oder, was dasselbe ist, die Bestimmung einer Function F, deren Determinante Δ eben die gegebene Function 4ter Ordnung ist. Die Bestimmung dieser Function hat aber gröfsere Schwierigkeiten, als sich mit den erlangten Hülfsmitteln überwinden lassen. Wir wollen uns daher begnügen, indem wir die Kenntnifs der Function F voraussetzen, andere Functionen F zu ermitteln, welche dieselbe Determinante haben.

Es sei die Function F:

$$(55.) \qquad 2F = u_{11}x^2 + u_{22}y^2 + \cdots + 2u_{12}xy + \cdots$$

bekannt. Durch Bestimmung der Coordinaten der 8 Schnittpuncte der drei Oberflächen $\frac{\partial 2F}{\partial \varkappa} = f = 0$, $\frac{\partial 2F}{\partial \lambda} = \varphi = 0$, $\frac{\partial 2F}{\partial \mu} = \psi = 0$ erhält man die Coëfficienten in den Substitutionen (11.), durch welche die als bekannt vorausgesetzte Function F in

$$(56.) \qquad F = F_{12}XY + F_{13}XZ + F_{14}XP + F_{23}YZ + F_{24}YP + F_{34}ZP$$

transformirt wird; und die Determinante ∇ dieser Function, nämlich:

$$(57.)\quad \nabla = r^2\Delta = F_{12}^2F_{34}^2 + F_{23}^2F_{14}^2 + F_{13}^2F_{24}^2 - 2F_{23}F_{14}F_{13}F_{24} - 2F_{13}F_{24}F_{12}F_{34} - 2F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}$$

ist der gegebene homogene Ausdruck 4ter Ordnung, multiplicirt mit r^2; also ist $\nabla = r^2\Delta = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve 4ter Ordnung.

Wir bemerken, dafs die Determinante ∇ ungeändert bleibt, wenn man 12 mit 34 vertauscht und gleichzeitig 13 mit 24 und 14 mit 23, während die Function F sich durch diese Vertauschung ändert. Sie geht nämlich in die Function F':

$$(58.)\quad F' = F_{34}X'Y' + F_{24}X'Z' + F_{23}X'P' + F_{14}Y'Z' + F_{13}Y'P' + F_{12}Z'P'$$

über, wenn man gleichzeitig X', Y', ... statt der Variabeln X, Y, ... setzt.

Diese Function F' ist in der That von der Function F verschieden, denn die eine kann nicht durch lineäre Substitutionen der neuen Variabeln von der andern abgeleitet werden. Beide Functionen haben aber dieselbe Determinante ∇.

Auf gleiche Weise nun, wie die drei Oberflächen zweiter Ordnung $\frac{\partial 2F}{\partial \varkappa} = f = 0$, $\frac{\partial 2F}{\partial \lambda} = \varphi = 0$, $\frac{\partial 2F}{\partial \mu} = \psi = 0$, deren 8 Schnittpuncte mit den Zahlen 12 ... 8 bezeichnet wurden, der Function F entsprechen, entsprechen auch die drei Oberflächen 2ter Ordnung $\frac{\partial 2F'}{\partial \varkappa} = 0$, $\frac{\partial 2F'}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial 2F'}{\partial \mu} = 0$, welche sich in den 8 Puncten 1', 2', ... 8' schneiden mögen, der Function F'. Die Spitzen der Kegel 2ter Ordnung, welche durch diese 8 Puncte hindurchgehen, beschreiben wieder eine Curve 6ter Ordnung, welche unter Vermittlung der Gleichungen:

$$\frac{\partial 2F'}{\partial X'} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial Y'} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial Z'} = 0, \quad \frac{\partial 2F'}{\partial P'} = 0,$$

analog den Gleichungen (14.) der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ entspricht. Es entspricht endlich jeder geraden Linie $p'q'$ eine von den Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$. Da nun auch jeder geraden Linie ab, welche zwei von den 8 Puncten 1, 2, ... 8 verbindet, eine von den Doppeltangenten entspricht, so werden einer jeden Doppeltangente zwei gerade Linien entsprechen: die eine aus dem Systeme F, die andere aus dem Systeme F'. Wir werden daher sagen, dafs zwei gerade Linien ab und $p'q'$, aus den beiden Systemen genommen, einander entsprechen, wenn jede von ihnen derselben Doppeltangente der Curve 4ter Ordnung entspricht.

Nach dieser Erklärung sollen die in den beiden Systemen einander entsprechenden geraden Linien näher bezeichnet werden. Zu diesem Zwecke ist es nöthig, die Coordinaten der 8 Puncte in dem Systeme F und in dem Systeme F' festzustellen. Wir setzen also fest, dafs des Punctes 1 Coordinaten $X=1$, $Y=0$, $Z=0$, $P=0$, des Punctes 1′ Coordinaten $X'=1$, $Y'=0$, $Z'=0$, $P'=0$, etc. sein sollen, dafs ferner des Punctes 5 Coordinaten X_5, Y_5, Z_5, P_5 sein sollen, wonach die des Punctes 5′ Coordinaten gleich $\frac{1}{X_5}$, $\frac{1}{Y_5}$, $\frac{1}{Z_5}$, $\frac{1}{P_5}$ gesetzt werden können, weil, wenn die ersten Coordinaten der Gleichung $F=0$ genügen, die letzteren der Gleichung $F'=0$ genügen müssen etc. Diese Bestimmungen, in den folgenden beiden Schemata übersichtlich zusammengestellt sind:

	X	Y	Z	P
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1
5	X_5	Y_5	Z_5	P_5
6	X_6	Y_6	Z_6	P_6
7	X_7	Y_7	Z_7	P_7
8	X_8	Y_8	Z_8	P_8

	X'	Y'	Z'	P'
1′	1	0	0	0
2′	0	1	0	0
3′	0	0	1	0
4′	0	0	0	1
5′	$\frac{1}{X_5}$	$\frac{1}{Y_5}$	$\frac{1}{Z_5}$	$\frac{1}{P_5}$
6′	$\frac{1}{X_6}$	$\frac{1}{Y_6}$	$\frac{1}{Z_6}$	$\frac{1}{P_6}$
7′	$\frac{1}{X_7}$	$\frac{1}{Y_7}$	$\frac{1}{Z_7}$	$\frac{1}{P_7}$
8′	$\frac{1}{X_8}$	$\frac{1}{Y_8}$	$\frac{1}{Z_8}$	$\frac{1}{P_8}$

Betrachtet man nun die Gleichung der, der geraden Linie ab entsprechenden Doppeltangente ab, welche in (46.) aufgestellt wurde, nämlich

$$F_{ab} = 0,$$

so ist der Theil links F_{ab} dieser Gleichung als eine Function der Coordinaten der beiden Puncte a und b nach (13.) wie folgt gegeben:

$$F_{ab} = x_a\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_b + y_a\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_b + z_a\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_b + p_a\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_b.$$

Stellt man diese Function als eine Function der Coordinaten X, Y, Z, P derselben beiden Puncte dar, indem man die letztere durch X_a, Y_a, ... X_b, Y_b, ... bezeichnet, welche unter Vermittelung der Gleichungen (11.) den ursprünglichen Coordinaten der genannten beiden Puncte entsprechen, so

findet sich:

$$F_{ab} = X_a\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_b + Y_a\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_b + Z_a\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)_b + P_a\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)_b.$$

Setzt man endlich für $\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_b$, $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_b$, ... ihre Werthe aus (56.) genommen, so erhält man für die Gleichung der Doppeltangente ab:

$$(59.)\quad \begin{aligned} F_{ab} = {} & X_a(F_{12}Y_b + F_{13}Z_b + F_{14}P_b) + X_a(F_{21}X_b + F_{23}Z_b + F_{24}P_b) \\ & + Z_a(F_{31}X_b + F_{32}Y_b + F_{34}P_b) + P_a(F_{41}X_b + F_{42}Y_b + F_{43}Z_b) = 0. \end{aligned}$$

Ebenso ergiebt sich für die Gleichung der Doppeltangente $p'q'$, wenn man die in (58.) gegebene Function F' zum Grunde legt:

$$(60.)\quad \begin{aligned} F_{p'q'} = {} & X'_{p'}(F_{34}Y'_{q'} + F_{24}Z'_{q'} + F_{23}P'_{q'}) + Y_{p'}(F_{34}X'_{q'} + F_{14}Z'_{q'} + F_{13}P'_{q'}) \\ & + Z_{q'}(F_{24}X'_{q'} + F_{14}Y'_{q'} + F_{12}P'_{q'}) + Z_{p'}(F_{23}X'_{q'} + F_{13}Y'_{q'} + F_{12}Z'_{q'}) = 0. \end{aligned}$$

Geht man auf die angegebenen Schemata zurück, so findet sich, indem man $a = 1$, $b = 2$, $p = 3$, $q = 4$ setzt, dafs:

$$F_{12} = F_{3'4'}$$

ist. In diesem Falle stellen die Gleichungen (59. und 60.) dieselbe Doppeltangente der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ dar. Es sind mithin nach der obigen Erklärung 12 und 3′4′ zwei entsprechende gerade Linien.

Auf diese Weise ergeben sich als entsprechende gerade Linien:

$$(A'.)\quad \begin{cases} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 3'4' & 2'4' & 2'3' & 1'4' & 1'3' & 1'2'. \end{cases}$$

Die angegebenen geraden Linien bilden die Kanten zweier Tetraëder 1234 und 1′2′3′4′. Die Kanten des einen entsprechen also den Kanten des anderen Tetraëders, auf die in (A'.) angegebene Weise.

Es wurde in dem Paragraph (10.) bewiesen, dafs sich durch die Berührungspuncte von drei Doppeltangenten die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ kein Kegelschnitt legen läfst, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein Dreieck bilden. In dem Systeme F' bilden nun die geraden Linien 1′2′, 1′3′, 2′3′ ein Dreieck. Daraus folgt, dafs die diesen geraden Linien entsprechenden Doppeltangenten 34, 24, 14 die Curve in 6 Puncten berühren werden, welche nicht in einem Kegelschnitt liegen. Da nun die den genannten Doppeltangenten in dem Systeme F' entsprechenden geraden Linien 34, 24, 14 in einem Puncte 4 zusammenstofsen, so ist zugleich folgender Satz bewiesen:

Durch die Berührungspuncte von drei Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ läfst sich kein Kegelschnitt legen, wenn die

den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien in einem Puncte zusammenlaufen.

Es ist für die folgende Auseinandersetzung vortheilhaft, die 28 den Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien, welche die 8 Puncte 1, 2, ... 8 paarweise verbinden, auf zwei Tetraëder 1234 und 5678 zu beziehen. 6 von den genannten geraden Linien bilden dann die Kanten des ersten, 6 andere die Kanten des zweiten Tetraëders und die 16 noch übrigen geraden Linien verbinden die Ecken des ersten mit den Ecken des zweiten Tetraëders. In dem System F' werden wir auf gleiche Weise die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien als die Kanten zweier Tetraëder $1'2'3'4'$ und $5'6'7'8'$ betrachten und die noch übrigen 16 geraden Linien als die Verbindungslinie der Ecken des ersten mit den Ecken des zweiten Tetraëders.

Nachdem nun nachgewiesen ist, wie die Kanten des Tetraëders 1234 den Kanten des Tetraëders $1'2'3'4'$ entsprechen, wollen wir untersuchen, welche geraden Linien in dem Systeme F den Verbindungslinien der Ecken der beiden Tetraëder des Systems F' entsprechen.

Der geraden Linie $1'5'$ entspricht die Doppeltangente $1'5'$, deren Gleichung aus (60.) hervorgeht, wenn man $X'_{p'} = 1$, $Y'_{p'} = 0$, $Z'_{p'} = 0$, $P'_{p'} = 0$ und $X'_{q'} = \frac{1}{X_5}$, $Y'_{q'} = \frac{1}{Y_5}$, $Z'_{q'} = \frac{1}{Z_5}$, $P'_{q'} = \frac{1}{P_5}$ setzt. Die Gleichung dieser Doppeltangente wird demnach zu

$$F'_{1'5'} = F_{34}\frac{1}{Y_5} + F_{24}\frac{1}{Z_5} + F_{23}\frac{1}{P_5} = 0,$$

oder, wenn man mit den Nennern multiplicirt:

$$F_{34}Z_5P_5 + F_{24}Y_5P_5 + F_{23}Y_5Z_5 = 0.$$

Da aber die Coordinaten X_5, Y_5, Z_5, P_5 statt X, Y, Z, P gesetzt die in (5.) angegebene Function F verschwinden machen, so erhält man die identische Gleichung:

$$F_{12}X_5Y_5 + F_{13}X_5Z_5 + F_{14}X_5P_5 + F_{23}Y_5Z_5 + F_{24}Y_5P_5 + F_{34}Z_5P_5 = 0,$$

mit deren Hülfe die vorhergehende Gleichung in

$$(F_{12}Y_5 + F_{13}Z_5 + F_{14}P_5)X_5 = 0$$

und, mit Weglassung des Factors X_5, in

$$F_{12}Y_5 + F_{13}Z_5 + F_{14}P_5 = 0$$

übergeht. Diese Gleichung der Doppeltangente 1′5′ ist aber gerade die Gleichung der Doppeltangente 15, wovon man sich durch (59.) überzeugen kann. Man sieht hieraus, dafs die 16 Verbindungslinien der Ecken der beiden Tetraëder in dem System F den 16 Verbindungslinien der Ecken der beiden Tetraëder in dem System F'' auf folgende Weise entsprechen:

$(B'.)$
$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 15 & 25 & 35 & 45 & 16 & 26 & 36 & 46 & 17 & 27 & 37 & 47 & 18 & 28 & 38 & 48 \\ 1'5' & 2'5' & 3'5' & 4'5' & 1'6' & 2'6' & 3'6' & 4'6' & 1'7' & 2'7' & 3'7' & 4'7' & 1'8' & 2'8' & 3'8' & 4'8'. \end{array}$$

Es können nun den 6 Kanten des Tetraëders 5678 in dem System F' nur noch die 6 Kanten des Tetraëders 5′6′7′8′ in dem System F'' entsprechen. Es bleibt aber zu untersuchen übrig, in welcher Weise die 6 Kanten

$$56 \quad 57 \quad 58 \quad 67 \quad 68 \quad 78$$

des ersten Tetraëders den 6 Kanten

$$5'6' \quad 5'7' \quad 5'8' \quad 6'7' \quad 6'8' \quad 7'8'$$

des anderen Tetraëders entsprechen.

Wir werden nachweisen, dafs der geraden Linie 5′6′ die gerade Linie 56 nicht entsprechen kann.

Wenn 5′6′ und 56 entsprechende gerade Linien wären, so würden, weil die geraden Linien 5′6′, 6′2′, 2′1′, 1′5′ in dem System F'' ein räumliches Viereck bilden, die diesen geraden Linien entsprechenden Doppeltangenten 56, 62, 34, 15 die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 8 Puncten berühren, welche in einem Kegelschnitt liegen. Es berühren aber die 4 Doppeltangenten 56, 62, 21, 15 die Curve in 8 Puncten, welche in einem Kegelschnitt liegen, weil die diesen Doppeltangenten in dem System F' entsprechenden geraden Linien ein räumliches Viereck bilden. Es müfsten also die Doppeltangenten 12 und 34 zusammenfallen; was gegen die Annahme ist.

Eben so wenig kann die gerade Linie 5′6′ der geraden Linie 57 entsprechen. Denn die geraden Linien 6′1′, 1′5′, 5′6′ bilden in dem System F'' ein Dreieck, deren entsprechende Doppeltangenten 61, 15, 57 die Curven in 6 Puncten berühren müfsten, durch welche sich kein Kegelschnitt legen läfst, während man weifs, dafs sich durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten 61, 15, 57, 76 ein Kegelschnitt legen läfst. Da nun die gerade Linie 5′6′ keiner von den geraden Linien 56, 57, 58, 67, 68 entsprechen kann, so mufs sie der geraden Linie 78 entsprechen.

Es entsprechen also die Kanten des Tetraëders 5678 den Kanten des Tetraëders 5′6′7′8′ auf folgende Weise:

$$(C'.)\quad \begin{cases} 56 & 57 & 58 & 67 & 68 & 78, \\ 7'8' & 6'8' & 6'7' & 5'8' & 5'7' & 5'6'. \end{cases}$$

Auch auf directem Wege läfst sich Dieses nachweisen, indem man zeigt, dafs sich die beiden Ausdrücke F_{56} und $F'_{7'8'}$ nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden. Dieser Beweis läfst sich aber nicht ohne weitläuftige Transformation der genannten Ausdrücke durchführen. Wir wollen uns daher mit dem gegebenen Beweise begnügen, und in der Entwickelung neuer Resultate fortfahren.

Die geraden Linien 1′2′, 2′6′, 6′5′, 5′1′ bilden in dem Systeme F' ein räumliches Viereck. Die ihnen entsprechenden Doppeltangenten 34, 26, 78, 51 berühren also die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 8 Puncten, durch welche sich ein Kegelschnitt legen läfst. Die diesen Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien in dem Systeme F verbinden die 8 Puncte 1, 2, ... 8 paarweise; aus welcher Bemerkung der am Ende des (§. 11.) erwähnte Satz hervorgeht, nämlich:

Die Berührungspuncte von vier Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einem Kegelschnitt, wenn die den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien die Puncte 12 ... 8 *paarweise verbinden.*

§. 13.

Auf dieselbe Art, wie die in (8.) gegebene Function F durch die Substitutionen (11.) in die Form (56.) übergeht, transformiren die Substitutionen

$$(61.)\quad \begin{cases} x = x_5\xi + x_6\eta + x_7\zeta + x_8\vartheta, \\ y = y_5\xi + y_6\eta + y_7\zeta + y_8\vartheta, \\ z = z_5\xi + z_6\eta + z_7\zeta + z_8\vartheta, \\ p = p_5\xi + p_6\eta + p_7\zeta + p_8\vartheta \end{cases}$$

dieselbe Function F in folgende:

$$(62.)\quad F = F_{56}\xi\eta + F_{57}\xi\zeta + F_{58}\xi\vartheta + F_{67}\eta\zeta + F_{68}\eta\vartheta + F_{78}\zeta\vartheta.$$

Diese Function ist nach der in (§. 6.) gegebenen Erklärung keine neue Function F, weil sie eben durch die lineären Substitutionen (61.) aus der in (8.) gegebenen Function F hervorgeht. Man kann aber, so wie man aus den Coëfficienten der Function F in (56.) die Function F' in (58.) compo-

nirte, auch hier aus den Coëfficienten der Function F in (62.) folgende Function F_1 zusammensetzen:

$$(63.) \qquad F_1 = F_{78}\xi'\eta' + F_{68}\xi'\zeta' + F_{67}\xi'\vartheta' + F_{58}\eta'\zeta' + F_{57}\eta'\vartheta' + F_{56}\zeta'\vartheta'.$$

Diese Function ist nach der gegebenen Erklärung eine von F verschiedene, also eine neue Function dieser Gattung.

Die Functionen F' und F_1 sind nicht verschiedene Functionen, weil die eine durch lineäre Substitutionen in die andere übergeht. Diese Behauptung wird durch die folgende Betrachtung gerechtfertigt werden.

Die 8 Schnittpuncte der drei Oberflächen 2ter Ordnung $f=0$, $\varphi=0$. $\psi=0$ lassen sich nach dem in diesem Journale (Bd. 20. S. 297) ausgesprochenen Lehrsatze (9.) als zwei Systeme harmonischer Pole einer andern Oberfläche 2ter Ordnung ansehen. Demnach mögen die Schnittpuncte 1, 2, 3, 4 das eine und die Schnittpuncte 5, 6, 7, 8 das andere System harmonischer Pole einer Oberfläche 2ter Ordnung bilden, deren Gleichung $\Phi=0$ sei. Um die Bedingungen dieser Annahme analytisch auszudrücken, sollen durch a und b irgend zwei von den Zahlen 1, 2, 3, 4 und durch p und q irgend zwei von den Zahlen 5, 6, 7, 8 bezeichnet werden. Alsdann erhält man:

$$(64.) \qquad x_a\Phi'(x_b) + y_a\Phi'(y_b) + z_a\Phi'(z_b) + p_a\Phi'(p_b) = 0,$$

$$(65.) \qquad x_p\Phi'(x_q) + y_p\Phi'(y_q) + z_p\Phi'(z_q) + p_p\Phi'(p_q) = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen, welche 6 Gleichungen in sich schliefst, drückt die Bedingung aus, dafs die Puncte 1, 2, 3, 4 ein System harmonischer Pole der Oberfläche $\Phi=0$ bilden. Eben so drückt die zweite, welche ebenfalls 6 Gleichungen umfafst, die Bedingung aus, dafs die Puncte 5, 6, 7, 8 ein System harmonischer Pole derselben Oberfläche bilden. Diesen 12 Gleichungen haben nun die 9 in der Gleichung der Oberfläche $\Phi=0$ enthaltenen Constanten zu genügen; was unmöglich zu sein scheint. Es ist aber an der citirten Stelle nachgewiesen worden, dafs drei von diesen 12 Gleichungen aus den 9 anderen folgen; weshalb die 12 Gleichungen in der That nur die Stelle von 9 Gleichungen vertreten, aus welchen sich die 9 Constanten in der Function Φ auf lineäre Weise berechnen lassen.

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (64.) transformiren die Substitutionen (11.) die Function Φ in die Form:

$$(66.) \qquad \Phi = b_1X^2 + b_2Y^2 + b_3Z^2 + b_4P^2,$$

während dieselbe Function, mit Rücksicht auf die Bedingungen (65.) durch die

Substitutionen (61.) die Form

$$(67.) \qquad \Phi = a_1\xi^2 + a_2\eta^2 + a_3\zeta^2 + a_4\vartheta^2$$

annimmt.

Setzt man nun die aus den Substitutionen (11. und 61.) genommenen Werthe von x einander gleich und eben so die Werthe von y, z, p, so erhält man 4 Gleichungen, welche, nach X, Y, Z, P aufgelöset, folgende Substitutionen ergeben:

$$(68.) \quad \begin{cases} X = X_5\xi + X_6\eta + X_7\zeta + X_8\vartheta, \\ Y = Y_5\xi + Y_6\eta + Y_7\zeta + Y_8\vartheta, \\ Z = Z_5\xi + Z_6\eta + Z_7\zeta + Z_8\vartheta, \\ P = P_5\xi + P_6\eta + P_7\zeta + P_8\vartheta. \end{cases}$$

In der That: wenn $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\vartheta = 0$ ist, so nehmen die Variabeln x, y, z, p nach (61.) die Werthe x_5, y_5, z_5, p_5 an, welchen letzteren nach (11.) die Werthe X_5, Y_5, Z_5, P_5 den Variabeln X, Y, Z, P entsprechen, die man unmittelbar aus den Gleichungen (68.) erhält, wenn man $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\vartheta = 0$ etc. setzt.

Demnach haben die Substitutionen (68.) die Eigenschaft, dafs sie die Function (66.) welche nur die Quadrate der Variabeln X, Y, ... enthält, in die Function (67.) transformiren, welche ebenfalls nur die Quadrate der Variabeln ξ, η, ... enthält.

Eine andere Eigenschaft der Substitutionen (68.) ergiebt sich aus der Ansicht der Functionen (56. und 62.). Sie transformiren die eine Function, in welcher die Quadrate der Variabeln fehlen, in die andere Function, in welcher ebenfalls die Quadrate der Variabeln fehlen.

Es haben demnach die genannten Substitutionen die beiden Eigenschaften, welche der in diesem Journal (Bd. 45, S. 100) bewiesene Lehrsatz 3. verlangt. Der genannte Lehrsatz tritt also hier in Wirksamkeit. Nach diesem Lehrsatze wird die Function (58.), nämlich:

$$(69.) \quad F' = F_{34}X'Y' + F_{24}X'Z' + F_{23}X'P' + F_{14}Y'P' + F_{13}Y'P' + F_{12}Z'P',$$

durch die Substitutionen

$$(70.)\quad \begin{cases} X' = \frac{1}{X_5}\xi'' + \frac{1}{X_6}\eta'' + \frac{1}{X_7}\zeta'' + \frac{1}{X_8}\vartheta'', \\ Y' = \frac{1}{Y_5}\xi'' + \frac{1}{Y_6}\eta'' + \frac{1}{Y_7}\zeta'' + \frac{1}{Y_8}\vartheta'', \\ Z' = \frac{1}{Z_5}\xi'' + \frac{1}{Z_6}\eta'' + \frac{1}{Z_7}\zeta'' + \frac{1}{Z_8}\vartheta'', \\ P' = \frac{1}{P_5}\xi'' + \frac{1}{P_6}\eta'' + \frac{1}{P_7}\zeta'' + \frac{1}{P_8}\vartheta'' \end{cases}$$

in

$$(71.)\quad F'' = \frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4}\{F_{78}\xi'\eta' + F_{68}\xi'\zeta' + F_{67}\xi'\vartheta' + F_{58}\eta'\zeta' + F_{57}\eta'\vartheta' + F_{56}\zeta'\vartheta'\}$$

transformirt, indem der Kürze wegen

$$\xi' = \frac{a_1 a_1 \xi''}{A^5},\quad \eta' = \frac{a_2 a_2 \eta''}{A^6},\quad \zeta' = \frac{a_3 a_3 \zeta''}{A^7},\quad \vartheta' = \frac{a_4 a_4 \vartheta''}{A^8}$$

$$\text{und}\quad A^\varkappa = X_\varkappa Y_\varkappa Z_\varkappa P_\varkappa$$

gesetzt ist. Vergleicht man die Function F'' in (71.) mit der Function F_1 in (63.), so findet sich, dafs sie sich nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden. Sie sind also nach der in Paragraph (6.) gegebenen Erklärung *keine* verschiedenen Functionen.

§. 14.

Um eine neue Function F aus der in (8.) gegebenen Function F abzuleiten, transformire man die gegebene Function durch lineäre Substitutionen, welche sich von den Substitutionen (11.) nur dadurch unterscheiden, dafs der Index 5 statt des Index 4 gesetzt wird, in:

$$(72.)\quad F = F_{12}XY + F_{13}XZ + F_{15}XP + F_{23}YZ + F_{25}YP + F_{35}ZP.$$

Aus den Coëfficienten der Variabeln der auf diese Weise transformirten Function componire man die neue Function

$$(73.)\quad F''' = F_{35}X''Y'' + F_{25}X''Z'' + F_{23}X''P'' + F_{15}Y''Z'' + F_{13}Y''P'' + F_{12}Z''P''.$$

Die 8 Schnittpuncte der drei Oberflächen $\frac{\partial F}{\partial \varkappa} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$ haben wir mit den Zahlen 1, 2, ... 8 bezeichnet. Die 8 Schnittpuncte der drei Oberflächen $\frac{\partial F''}{\partial \varkappa} = 0$, $\frac{\partial F''}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial F''}{\partial \mu} = 0$, welche in gleicher Weise der Function F''' entsprechen, werden wir mit $1''$, $2''$, ... $8''$ bezeichnen. Endlich stellen wir die Coordinaten der ersten und der zweiten 8 Puncte wie folgt übersichtlich zusammen.

	X	Y	Z	P
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
5	0	0	0	1
4	X_4	Y_4	Z_4	P_4
6	X_6	Y_6	Z_6	P_6
7	X_7	Y_7	Z_7	P_7
8	X_8	Y_8	Z_8	P_8

	X''	Y''	Z''	P''
1″	1	0	0	0
2″	0	1	0	0
3″	0	0	1	0
5″	0	0	0	1
4″	$\frac{1}{X_4}$	$\frac{1}{Y_4}$	$\frac{1}{Z_4}$	$\frac{1}{P_4}$
6″	$\frac{1}{X_6}$	$\frac{1}{Y_6}$	$\frac{1}{Z_6}$	$\frac{1}{P_6}$
7″	$\frac{1}{X_7}$	$\frac{1}{Y_7}$	$\frac{1}{Z_7}$	$\frac{1}{P_7}$
8″	$\frac{1}{X_8}$	$\frac{1}{Y_8}$	$\frac{1}{Z_8}$	$\frac{1}{P_8}$

Es versteht sich, dafs diese Coordinaten andere Werthe haben, als die mit demselben Zeichen bezeichneten in den beiden Schemata des (§. 11.).

Es entsprechen nun die Kanten des Tetraëders 1235 den Kanten des Tetraëders 1″2″3″5″ in folgender Weise:

$$(A''.)\quad \begin{cases} 1\,2 & 1\,3 & 1\,5 & 2\,3 & 2\,5 & 3\,5, \\ 3''5'' & 2''5'' & 2''3'' & 1''5'' & 1''3'' & 1''2''. \end{cases}$$

Eben so werden die Kanten des Tetraëders 4678 den Kanten des Tetraëders 4″6″7″8″ wie folgt entsprechen:

$$(C''.)\quad \begin{cases} 4\,6 & 4\,7 & 4\,8 & 6\,7 & 6\,8 & 7\,8, \\ 7''8'' & 6''8'' & 6''7'' & 4''8'' & 4''7'' & 4''6''. \end{cases}$$

Endlich entsprechen die Verbindungslinien der Ecken der dem System F angehörigen Tetraëder den Verbindungslinien der Ecken der dem System F'' angehörigen Tetraëder auf folgende Weise:

$$(B''.)\quad \begin{cases} 1\,4 & 1\,6 & 1\,7 & 1\,8 & 2\,4 & 2\,6 & 2\,7 & 2\,8 & 3\,4 & 3\,6 & 3\,7 & 3\,8 & 5\,4 & 5\,6 & 5\,7 & 5\,8, \\ 1''4'' & 1''6'' & 1''7'' & 1''8'' & 2''4'' & 2''6'' & 2''7'' & 2''8'' & 3''4'' & 3''6'' & 3''7'' & 3''8'' & 5''4'' & 5''6'' & 5''7'' & 5''8''. \end{cases}$$

Hätte man am Anfang dieses Paragraphen lineäre Substitutionen gewählt, welche sich von den Substitutionen (61.) nur dadurch unterscheiden, dafs der Index 5 in den Index 4 verändert ist, so würde man schliefslich eine Function $F_{''}$ erhalten haben, welche von F'' ***nicht*** verschieden ist.

Fährt man in der vorgezeichneten Weise fort, aus der gegebenen Function F neue Functionen dieser Gattung zu bilden, so ist leicht zu sehen, dafs man so viele neue Functionen F erlangen wird, als die 8 Puncte 1, 2, ... 8 in zwei Gruppen von 4 Puncten sich vertheilen lassen. Nimmt man noch die

gegebene Function F hinzu, so erhält man den Satz:

Einer gegebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ entsprechen 36 verschiedene Functionen F, deren Determinanten sämmtlich gleich Δ sind.

Jeder dieser Functionen entspricht ein System von 28 geraden, 8 Puncte des Raumes paarweise verbindenden Linien, welche in der beschriebenen Weise den 28 Doppeltangenten der gegebenen Curve entsprechen. In der folgenden Tafel findet man die den 28 Doppeltangenten in den verschiedenen Systemen entsprechenden geraden Linien zusammengestellt. Die Zahlen der ersten verticalen Reihe in der Tafel entsprechen den 36 verschiedenen Functionen F. Die letzte verticale Reihe enthält die diesen Functionen entsprechenden zwei Gruppen der 8 Puncte 1, 2, ... 8. Aufserdem findet man in der ersten horizontalen Reihe die 28 den Doppeltangenten in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien verzeichnet. Darunter stehen die diesen entsprechenden geraden Linien des Systems F', wie sie in A', B', C' angegeben sind, mit Weglassung des Index $'$. Die folgende horizontale Reihe enthält die entsprechenden geraden Linien des Systems F''' nach Vorschrift von A'', B'', C''', mit Weglassung des Index $''$ etc.

Der Gebrauch der am Schlufs dieses Paragraphen angehängten Tafel ergiebt sich nach dem Vorhergenden von selbst. So entnehmen wir zum Beispiel, gestützt auf den zweiten Satz des (§. 9.), aus der Tafel, da 12, 25, 56, 61 in der Reihe 35 ein Viereck bilden, dafs die ihnen entsprechenden Doppeltangenten in der Reihe 0, nämlich 12, 34, 56, 78 die Curve der 4ten Ordnung $\Delta = 0$ in 8 Puncten berühren, welche in einem Kegelschnitt liegen; was wir am Ende des (§. 12.) in Gestalt eines Satzes ausgedrückt haben.

Zur Vervollständigung des obigen Satzes in diesem Paragraphen bleibt noch nachzuweisen übrig, dafs der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ aufser den genannten 36 Functionen F, nicht noch andere Functionen F entsprechen, deren Determinanten gleich Δ sind. Dieser Nachweis wird der folgende Paragraph geben.

0.	12	13	14	15	16	17	18	23	24	25	26	27	28	34	35	36	37	38	45	46	47	48	56	57	58	67	68	78	
1.	34	24	23	15	16	17	18	14	13	25	26	27	28	34	35	36	37	38	45	46	47	48	78	68	67	58	57	56	1234 5678
2.	35	25	14	23	16	17	18	15	24	13	26	27	28	34	12	36	37	38	45	78	68	67	56	57	58	48	47	46	1235 4678
3.	36	26	14	15	23	17	18	16	24	25	13	27	28	34	35	12	37	38	78	46	58	57	56	48	47	67	68	45	1236 4578
4.	37	27	14	15	16	23	18	17	24	25	26	13	28	34	35	36	12	38	68	58	47	56	48	57	46	67	45	78	1237 4568
5.	38	28	14	15	16	17	23	18	24	25	26	27	13	34	35	36	37	12	67	57	56	48	47	46	58	45	68	78	1238 4567
6.	45	13	25	24	16	17	18	23	15	14	26	27	28	34	35	78	68	67	12	46	47	48	56	57	58	38	37	36	1245 3678
7.	46	13	26	15	24	17	18	23	16	25	14	27	28	34	78	36	58	57	45	12	47	48	56	38	37	67	68	35	1246 3578
8.	47	13	27	15	16	24	18	23	17	25	26	14	28	34	68	58	37	56	45	46	12	48	38	57	36	67	35	78	1247 3568
9.	48	13	28	15	16	17	24	23	18	25	26	27	14	34	67	57	56	38	45	46	47	12	37	36	58	35	68	78	1248 3567
10.	56	13	14	26	25	17	18	23	24	16	15	27	28	78	35	36	48	47	45	46	38	37	12	57	58	67	68	34	1256 3478
11.	57	13	14	27	16	25	18	23	24	17	26	15	28	68	35	48	37	46	45	38	47	36	56	12	58	67	34	78	1257 3468
12.	58	13	14	28	16	17	25	23	24	18	26	27	15	67	35	47	46	38	45	37	36	48	56	57	12	34	68	78	1258 3467
13.	67	13	14	15	27	26	18	23	24	25	17	16	28	58	48	36	37	45	38	46	47	35	56	57	34	12	68	78	1267 3458
14.	68	13	14	15	28	17	26	23	24	25	18	27	16	57	47	36	45	38	37	46	35	48	56	34	58	67	12	78	1268 3457
15.	78	13	14	15	16	28	27	23	24	25	26	18	17	56	46	45	37	38	36	35	47	48	34	57	58	67	68	12	1278 3456
16.	12	45	35	34	16	17	18	23	24	25	78	68	67	15	14	36	37	38	13	46	47	48	56	57	58	28	27	26	1345 2678
17.	12	46	36	15	34	17	18	23	24	78	26	58	57	16	35	14	37	38	45	13	47	48	56	28	27	67	68	25	1346 2578
18.	12	47	37	15	16	34	18	23	24	68	58	27	56	17	35	36	14	38	45	46	13	48	28	57	26	67	25	78	1347 2568
19.	12	48	38	15	16	17	34	23	24	67	57	56	28	18	35	36	37	14	45	46	47	13	27	26	58	25	68	78	1348 2567
20.	12	56	14	36	35	17	18	23	78	25	26	48	47	34	16	15	37	38	45	46	28	27	13	57	58	67	68	24	1356 2478
21.	12	57	14	37	16	35	18	23	68	25	48	27	46	34	17	36	15	38	45	28	47	26	56	13	58	67	24	78	1357 2468
22.	12	58	14	38	16	17	35	23	67	25	47	46	28	34	18	36	37	15	45	27	26	48	56	57	13	24	68	78	1358 2467
23.	12	67	14	15	37	36	18	23	58	48	26	27	45	34	35	17	16	38	28	46	47	25	56	57	24	13	68	78	1367 2458
24.	12	68	14	15	38	17	36	23	57	47	26	45	28	34	35	18	37	16	27	46	25	48	56	24	58	67	13	78	1368 2457
25.	12	78	14	15	16	38	37	23	56	46	45	27	28	34	35	36	18	17	26	25	47	48	24	57	58	67	68	13	1378 2456
26.	12	13	56	46	45	17	18	78	24	25	26	38	37	34	35	36	28	27	16	15	47	48	14	57	58	67	68	23	1456 2378
27.	12	13	57	47	16	45	18	68	24	25	38	27	36	34	35	28	37	26	17	46	15	48	56	14	58	67	23	78	1457 2368
28.	12	13	58	48	16	17	45	67	24	25	37	36	28	34	35	27	26	38	18	46	47	15	56	57	14	23	68	78	1458 2367
29.	12	13	67	15	47	46	18	58	24	38	26	27	35	34	28	36	37	25	45	17	16	48	56	57	23	14	68	78	1467 2358
30.	12	13	68	15	48	17	46	57	24	37	26	35	28	34	27	36	25	38	45	18	47	16	56	23	58	67	14	78	1468 2357
31.	12	13	78	15	16	48	47	56	24	36	35	27	28	34	26	25	37	38	45	46	18	17	23	57	58	67	68	14	1478 2356
32.	12	13	14	67	57	56	18	48	38	25	26	27	34	28	35	36	37	24	45	46	47	23	17	16	58	15	68	78	1567 2348
33.	12	13	14	68	58	17	56	47	37	25	26	34	28	27	35	36	24	38	45	46	23	48	18	57	16	67	15	78	1568 2347
34.	12	13	14	78	16	58	57	46	36	25	34	27	28	26	35	24	37	38	45	23	47	48	56	18	17	67	68	15	1578 2346
35.	12	13	14	15	78	68	67	45	35	34	26	27	28	25	24	36	37	38	23	46	47	48	56	57	58	18	17	16	1678 2345

§. 15.

Die Zahl der Combinationen der 28 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, zu dreien, beträgt $\frac{28.27.26}{1.2.3} = 3276$. Unter diesen Combinationen von drei Doppeltangenten giebt es solche, deren Berührungspuncte nicht auf einem Kegelschnitt liegen und solche, durch deren Berührungspuncte sich ein Kegelschnitt legen läfst.

Es giebt 2016 Combinationen von 3 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, deren Berührungspuncte nicht in einem Kegelschnitt liegen.

In der That: in (§. 10.) wurde nachgewiesen, dafs das der Function F entsprechende System von Berührungscurven 3ter Ordnung $a = 0$, 56 Combinationen von drei Doppeltangenten in sich schliefst, durch deren Berührungspuncte sich kein Kegelschnitt legen läfst. Da man aber 36 Systeme von Berührungscurven 3ter Ordnung hat, welche den 36 Functionen F entsprechen, so hat man auch $36.56 = 2016$ Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspuncte nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Zwei von diesen Combinationen, welche verschiedenen Systemen von Berührungscurven angehören, können aber nicht zusammenfallen, weil dann nach dem zweiten Satze in (§. 6.) die beiden Systeme selbst zusammenfallen müfsten.

Die in dem Satze angegebene Zahl von Combinationen erhält man auch durch folgende Betrachtung. Nach dem zweiten Satze in (§. 10.) wird man so viele Combinationen von 3 Doppeltangenten haben, deren Berührungspuncte nicht in einem Kegelschnitt liegen, als die 28, den Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien verschiedene Dreiecke bilden. Die 28 geraden Linien des Systems F bilden aber 56 verschiedene Dreiecke. Mithin giebt es, erstens, 56 Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspuncte nicht in einem Kegelschnitt liegen.

Nach dem ersten Satze in (§. 12.) wird man so viele Combinationen von drei Doppeltangenten angeben können, deren Berührungspuncte nicht in einem Kegelschnitt liegen, als von den 28, den Doppeltangenten in dem Systeme F entsprechenden geraden Linien drei in einem Puncte zusammenstofsen. Von diesen geraden Linien stofsen aber 280 Mal drei in einem Puncte zusammen. Mithin giebt es, zweitens, 280 Combinationen von drei Doppeltangenten der bezeichneten Art.

Es giebt noch eine dritte Art von Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspuncte nicht in einem Kegelschnitt liegen. In der Tafel des vorhergehenden Paragraph sahen wir, dafs in der Reihe 1 die geraden Linien 34, 24, 45 in einem Puncte zusammenstofsen; woraus zu schliefsen ist, dafs die ihnen entsprechenden Doppeltangenten 12, 13, 45 in der Reihe 0 die Curve 4ter Ordnung in 6 Puncten berühren, welche nicht auf einem Kegelschnitt liegen; was sich allgemeiner so ausdrücken läfst.

Die Berührungspuncte von drei Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Delta = 0$ liegen nicht auf einem Kegelschnitt, wenn nur zwei von der, den drei Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien sich in einem Puncte schneiden.

Die 28 den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien in dem System F bilden 1680 Combinationen von der eben bezeichneten Art. Es giebt also 1680 Combinationen von drei Doppeltangenten dritter Art.

Durch Addition der drei angegebenen Zahlen der Combinationen erhält man nun die in dem obigen Satze angegebene Gesammtzahl von Combinationen von drei Doppeltangenten, deren Berührungspuncte nicht in einem Kegelschnitt liegen.

Es giebt 1260 Combinationen von drei Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, deren Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt liegen.

Um diesen Satz zu beweisen, gehe man auf den zweiten Satz in (§. 9.) zurück. Nach diesem Satze wird man so viele Combinationen von 4 Doppeltangenten angeben können, deren Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt liegen, als die 28, den Doppeltangenten in dem Systeme F entsprechenden, geraden Linien verschiedene räumliche Vierecke bilden. Da aber diese geraden Linien 210 verschiedene Vierecke bilden, so giebt es auch 210 verschiedene Kegelschnitte, welche durch die Berührungspuncte von 4 Doppeltangenten hindurchgehen.

Nach dem letzten Satze in (§. 12.) giebt es ferner so viele Combinationen von 4 Doppeltangenten, durch deren Berührungspuncte ein Kegelschnitt hindurchgeht, als Systeme von vier geraden Linien, welche die 8 Puncte 1, 2, ... 8 paarweise verbinden. Da sich nun 105 solcher Systeme von vier geraden Linien finden lassen, so hat man noch 105 verschiedene Kegelschnitte, welche durch die Berührungspuncte von vier Doppeltangenten hindurchgehen.

Es giebt also 315 Combinationen von vier Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$, deren Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt liegen.

Derselbe Satz ist im (§. 11.)* auf einem anderen Wege bewiesen und dort so ausgedrückt worden:

Die Zahl der Kegelschnitte, welche durch 8 Berührungspuncte von vier Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung gelegt werden können, ist gleich 315.

Jede von den 315 Combinationen von vier Doppeltangenten des vorstehenden Satzes enthält 4 Combinationen von drei Doppeltangenten, durch deren Berührungspuncte ein Kegelschnitt geht. Mithin ist $4.315 = 1260$ die Zahl der Combinationen von drei Doppeltangenten, durch deren Berührungspuncte ein Kegelschnitt geht.

Wir haben demnach 2016 Combinationen nach Vorschrift des ersten Satzes und 1260 Combinationen, wie sie der zweite Satz verlangt. Da die Summe beider Zahlen 3276 die Gesammtzahl der Combinationen der 28 Doppeltangenten zu dreien ist, so sondern sich die letzteren in zwei Gruppen, von denen die Berührungspuncte der ersteren nicht in einem Kegelschnitt liegen, während die Berührungspuncte der andern in einem Kegelschnitt liegen.

Wir sind nun im Stande, den Beweis zu führen, dafs der gegebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ nicht mehr als die 36 genannten Functionen F entsprechen, deren Determinanten sämmtlich gleich Δ sind. Denn gäbe es aufser ihnen noch eine andere Function F, so würden dieser, aufser den genannten 2016 Combinationen noch 56 neue Combinationen von 3 Doppeltangenten entsprechen, deren Berührungspuncte nicht auf einem Kegelschnitt liegen; was mit den vorhergehenden Sätzen nicht vereinbar ist. Es entsprechen also einer gegebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ ***nur*** 36 Functionen F, deren Determinanten sämmtlich gleich Δ sind.

Da man nur die Kenntnifs der Function F, oder des ihr entsprechenden Systems von Berührungscurven 3ter Ordnung voraussetzte, so liefsen sich am Ende des (§. 10.) nur 28 verschiedene Systeme Berührungskegelschnitte daraus ableiten. Wir haben aber 36 verschiedene Functionen F kennen gelernt. Mithin würden 28.36 Systeme Berührungskegelschnitte vorhanden sein, wenn die verschiedenen Functionen F nur verschiedene Systeme von Berührungskegelschnitten darböten. Jedes System von Berührungskegelschnitten entspricht aber 16 verschiedenen Functionen F.

Mithin ist die Zahl der verschiedenen Systeme von Berührungskegelschnitten einer gegebenen Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ gleich 63.

Diesen Satz findet man in (§. 10.)* anders bewiesen. Dafs jedes System von Berührungskegelschnitten aus 16 verschiedenen Functionen F sich auf die in (§. 10.) angegebene Art ableiten läfst, läfst sich auf die Weise deutlich machen, dafs man nachweiset, wie ein bestimmter Berührungskegelschnitt, zum Beispiel das mit 12 und 13 bezeichnete Doppeltangentenpaar, 16 verschiedenen Functionen F entspricht. Aus der Tafel im vorhergehenden Paragraph ist zu sehen, dafs das genannte Doppeltangentenpaar den 6 Functionen F entspricht, welchen die Indices 0, 1, ... 6 zukommen und den 10 Functionen F, welchen die Indices 26, 27, ... 35 zukommen, während dieses Doppeltangentenpaar allen übrigen Functionen F nicht entspricht.

§. 16.

Am Ende von (§. 10.) haben wir auf die Curven dritter Ordnung aufmerksam gemacht, welche durch die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ hindurchgehen. Wir wiederholen hier den ersten Theil des dort bewiesenen Satzes:

*a) **Die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn die, den 6 Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien zwei gesonderte Dreiecke bilden.***

Man wird demnach so viele Combinationen von 6 Doppeltangenten der genannten Art haben, als sich Ebenenpaare durch je 6 von den 8 Puncten 1, 2, ... 8 hindurchlegen lassen. Durch 6 Puncte lassen sich 10 Ebenenpaare hindurchlegen; also durch je 6 von 8 Puncten gehen $28.10 = 280$ Ebenenpaare. Bezeichnet man nun durch a die Zahl der Combinationen von 6 Doppeltangenten, deren in dem Systeme F entsprechende gerade Linien zwei gesonderte Dreiecke bilden, so erhält man für die Zahl der verschiedenen Curven 3ter Ordnung, welche durch die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten der bezeichneten Art hindurchgehen:

$$a = 280.$$

*b) **Die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn 5 von den, den 6 Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien***

in einem Puncte zusammenstofsen und die 6te keine von den genannten geraden Linien schneidet.

In der That: da die geraden Linien der ersten horizontalen Reihe: 23, 34, 42, 15, 56, 61 in der Tafel zwei gesonderte Dreiecke bilden, wie sie der vorhergehende Satz (*a.*) verlangt, so geht durch die Berührungspuncte der ihnen entsprechenden Doppeltangenten 12, 13, 14, 15, 16, 78 der 0ten horizontalen Reihe eine Curve dritter Ordnung hindurch. Bezeichnet man durch b die Zahl dieser Art Curven dritter Ordnung, so erhält man diese Zahl, wenn man die Zahl der Combinationen von 7 Elementen zur zweiten Classe mit 7 multiplicirt. Es ist also:

$$b = 168.$$

Die geraden Linien 23, 34, 23, 56, 67, 57 in der ersten horizontalen Reihe der Tafel bilden zwei gesonderte Dreiecke. Die ihnen entsprechenden Doppeltangenten in der 0ten horizontalen Reihe berühren also die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 12 Puncten, welche auf einer Curve dritter Ordnung liegen; welche Bemerkung sich so ausdrücken läfst:

*c) **Die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn drei von den, den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten eines Tetraëders, und die drei andern den Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten eines zweiten von dem ersten gesonderten Tetraëders bilden.***

Die Zahl c dieser Curven dritter Ordnung wird 35 sein; welche ergiebt, wie oft die 8 Puncte 1, 2, ... 8 sich in zwei Gruppen von je vier Puncten vertheilen lassen, multiplicirt mit 16. Demnach ist:

$$c = 560.$$

Mit Hülfe eines dieser Sätze wird man in der Tafel vergeblich nach neuen Combinationen von 6 Doppeltangenten der Linien 4ter Ordnung $\Delta = 0$ suchen, durch deren Berührungspuncte eine Curve dritter Ordnung hindurchgeht. Diese Sätze führen vielmehr auf einander zurück. Addirt man die Zahlen $a, b, c,$ so erhält man 1008 als Gesammtzahl der Combinationen von 6 Doppeltangenten, durch deren Berührungspuncte Curven dritter Ordnung hindurchgehen. Es ist aber wichtig, zu bemerken, dafs in jeder der bezeichneten Combinationen von 6 Doppeltangenten nicht drei Doppeltangenten gefunden

werden können, durch deren Berührungspuncte ein Kegelschnitt hindurchgeht; wovon man sich leicht durch den Vergleich mit den drei in (§. 15.) angeführten Arten von Combinationen von drei Doppeltangenten überzeugt, deren Berührungspuncte nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Wir können demnach sagen:

Es giebt 1008 verschiedene Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ hindurchgehen, unter denen nicht 3 Doppeltangenten enthalten sind, deren Berührungspuncte auf einem Kegelschnitt liegen.

Wenn man die letzte Bestimmung, dafs die Berührungspuncte von je drei der 6 Doppeltangenten nicht in einem Kegelschnitt liegen sollen, aufhebt, so findet man noch mehr Curven von der genannten Art, indem man von dem zweiten Theile des am Ende des (§. 10.) bewiesenen Satzes ausgeht:

A) Die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn die, den 6 Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien zwei Dreiecke bilden, welche eine Ecke gemein haben.

Nach diesem Satze werden die den Seiten der beiden Dreiecke 123, 345 entsprechenden Doppeltangenten die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 12 Puncten berühren, welche in einer Curve dritter Ordnung liegen. Verbindet man die beiden Puncte 2 und 5 durch eine gerade Linie, so bilden die Seiten der beiden Dreiecke mit der geraden Linie 25 zwei räumliche Vierecke 2135 und 2345, mit der gemeinschaftlichen Seite 25. Nach dem zweiten Satze in (§. 9.) liegen die Berührungspuncte der den Seiten der beiden Dreiecke entsprechenden Doppeltangenten auf zwei Kegelschnitten, welche sich in den Berührungspuncten der Doppeltangente 25 schneiden. Dieser Doppeltangente 25 entspricht also die angegebene Combination der 6, den Seiten der beiden Dreiecke entsprechenden Doppeltangenten. Die Zahl aller Combinationen, welche in gleicher Weise der Doppeltangente 25 entsprechen, wird demnach der Zahl der Combinationen der 6 Elemente 1, 3, 4, 6, 7, 8 zur dritten Classe, multiplicirt mit der Zahl der Permutationen von 3 Elementen gleich sein, also $= 20.6 = 120$. Da wir aber 28 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung haben, und jeder von ihnen 120 Combinationen entsprechen, so würde man im Ganzen 120.28 Combinationen von 6 Doppeltangenten erhalten, deren entsprechende gerade Linien zwei Dreiecke bilden, mit einer gemeinschaftlichen Ecke, wenn jede Combination nur einer Doppeltangente

in der angegebenen Weise entspräche. Die eben angegebene Combination entspricht aber eben so der Doppeltangente 25, als der Doppeltangente 15, oder 14, oder 24. Es ist daher jede Combination 4 Mal gezählt. Bezeichnet man nun durch A die Zahl der verschiedenen Combinationen von 6 Doppeltangenten, deren entsprechende Linien zwei Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Ecke bilden, so ergiebt sich

$$A = \frac{120.28}{4} = 840.$$

B) Die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ liegen auf einer Curve dritter Ordnung, wenn die den 6 Doppeltangenten entsprechenden geraden Linien ein räumliches Sechseck bilden.

In der That: die geraden Linien 12, 23, 31, 34, 45, 53 der Reihe 17 in der Tafel bilden zwei Dreiecke mit einer, beiden gemeinschaftlichen Ecke. Daraus folgt, dafs die ihnen in der Reihe 0 entsprechenden Doppeltangenten 12, 23, 46, 61, 45, 35 die Curve 4ter Ordnung in 12 Puncten berühren, welche auf einer Curve 3ter Ordnung liegen. Die diesen Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien bilden aber ein *räumliches Sechseck.*

Durch die 12 Berührungspuncte der genannten Doppeltangenten lassen sich 4 Mal zwei Kegelschnitte legen, welche sich in den Berührungspuncten einer anderen Doppeltangente schneiden. Nach dem letzten Satze in (§. 12.) liegen die Berührungspuncte der Doppeltangenten 12, 35, 46 auf einem Kegelschnitt, der durch die Berührungspuncte der Doppeltangente 78 hindurchgeht, und die Berührungspuncte der Doppeltangenten 23, 45, 16 liegen auf einem Kegelschnitt, der ebenfalls durch die Berührungspuncte der Doppeltangente 78 hindurchgeht. In derselben Art, wie die genannte Combination von 6 Doppeltangenten der Doppeltangente 78 entspricht, entspricht diese Combination, nach dem zweiten Satz im (§. 9.), auch der Doppeltangente 15, oder 24, oder 36. Wir wollen mit B die Zahl der verschiedenen Curven dritter Ordnung von der beschriebenen Art bezeichnen. Diese Zahl ist gleich der Zahl der von den, den 28 Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien gebildeten räumlichen Sechsecke; deren Zahl beträgt $28.60 = 1680$. Es ist also:

$$B = 1680.$$

C) Die Berührungspuncte der 6 Doppeltangenten* 16, 26, 36, 34, 35, 78 *der Curve 4ter Ordnung* $\Delta = 0$ *liegen auf einer Curve 3ter Ordnung.

Da nämlich in der Reihe (3.) der Tafel die geraden Linien 23, 13, 12 und 34, 35, 45 zwei Dreiecke bilden, welche eine gemeinschaftliche Ecke haben, so liegen die Berührungspuncte der diesen geraden Linien entsprechenden Doppeltangenten in der Reihe 0 auf einer Curve dritter Ordnung.

Durch die Berührungspuncte der genannten 6 Doppeltangenten lassen sich 4 Mal zwei Kegelschnitte legen, welche sich in einer neuen Doppeltangente schneiden. Die Berührungspuncte der Doppeltangenten 26, 36, 35 liegen auf einem Kegelschnitt. Auf einem zweiten Kegelschnitt liegen die Berührungspuncte der Doppeltangenten 16, 34, 78, welcher den ersten in den Berührungspuncten der Doppeltangente 25 schneidet. Auf dieselbe Weise wie die angegebene Combination von 6 Doppeltangenten der Doppeltangente 25 entspricht, entspricht sie auch der Doppeltangente 14, oder 24, oder 15.

Die den genannten 6 Doppeltangenten in dem System F entsprechenden geraden Linien 16, 26, 36, 34, 35, 78 bilden eine räumliche Figur. Wie oft nun durch die den Doppeltangenten entsprechenden 28 geraden Linien eine solche Figur gebildet wird, so viele Curven gehen durch die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten hindurch. Um diese Zahl C der Curven dritter Ordnung zu ermitteln, mufs man also die Zahl der räumlichen Figuren von der beschriebenen Art bestimmen. Die beschriebene Figur besteht aus zwei Theilen, von denen der erste aus den 5 zusammenhängenden geraden Linien 16, 26, 36, 34, 35, die durch die Puncte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmt sind, gebildet wird. Der zweite gesonderte Theil der Figur besteht aus der einen geraden Linie 78. Wenn man die letztere gerade Linie ungeändert läfst und nun die Puncte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit einander vertauscht, so erhält man 90 verschiedene Figuren. Man hat also 90.28 verschiedene Figuren von der beschriebenen Art. Es ist demnach:

$$C = 2520.$$

Addirt man die Zahlen A, B, C, so erhält man die Zahl 5040 aller Curven dritter Ordnung von der beschriebenen Art. Wir haben also folgenden Satz:

Es giebt 5040 verschiedene Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspuncte von 6 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ ***hindurchgehen. Durch die 12 Berührungs-***

puncte der 6 Doppeltangenten lassen sich 4 Paare Kegelschnitte legen. Jedes Paar Kegelschnitte schneidet sich in den Berührungspuncten einer andern Doppeltangente und die 4 Doppeltangenten, in welchen sich die 4 Paare Kegelschnitte schneiden, berühren die Curve in 8 Puncten, welche auf einem Kegelschnitt liegen.

§. 17.

Das Problem der Doppeltangenten einer gegebenen Curve 4ter Ordnung haben wir in (§. 8.) auf die Transformation einer gegebenen homogenen Function Δ vom 4ten Grade in die Form (9.) einer symmetrischen Determinante zurückgeführt. Diese Transformation läfst sich unter Umständen algebraisch durchführen; durch Auflösung von Gleichungen, welche den 4ten Grad nicht übersteigen.

Wenn Δ in zwei rationale Factoren zerfällt, so läfst sich Δ in die Form einer symmetrischen Determinante algebraisch transformiren.

Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder zerfällt Δ in einen Factor vom 3ten Grade und in einen Factor ersten Grades, oder es zerfällt Δ in zwei Factoren zweiten Grades.

Behandeln wir zuerst den ersten Fall, indem wir annehmen, dafs v der homogene Factor 3ten Grades und a der lineäre Factor sei; unter welcher Voraussetzung eben ist:

$$(74.) \qquad \Delta = v.a.$$

Man kann nun drei verschiedene homogene Functionen 3ten Grades u bestimmen, oder durch Multiplication derselben mit der dritten Wurzel der Einheit 9 homogene Functionen u, deren Determinanten der gegebenen Function v gleich sind, so dafs, wenn man durch $u_{\varkappa\lambda}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u bezeichnet,

$$v = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Die Bestimmung der Function u verlangt nur die Auflösung einer Gleichung 3ten Grades, welche ich im 28ten Bande dieses Journals S. 89 aufgestellt habe. Demnach stellt sich Δ als eine symmetrische Determinante dar, wie folgt:

$$(75.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Wir gehen zu dem andern Falle über. Um von der Form der symmetrischen Determinante (9.) zu der Form (47.) einer ebenfalls symmetrischen aber einfacheren Determinante überzugehen, welche unmittelbar die Doppeltangenten giebt, bedurfte es der Auflösung einer Gleichung vom 8ten Grade. In unserem Falle, wenn Δ in zwei Factoren 2ten Grades U und V zerfällt, wird sich die Transformation gleich auf diese Form (47.) algebraisch durchführen lassen.

Man weifs, dafs sich zwei beliebige homogene Functionen vom zweiten Grade von 3 Variabeln immer in zwei Functionen, welche nur die Quadrate der neuen Variabeln enthalten, transformiren lassen und dafs diese Transformation die Auflösung einer cubischen Gleichung erfordert. Wir können demnach, ohne das Problem zu beschränken, annehmen, dafs die Factoren von Δ, U und V von der Form

$$(76.)\quad \begin{cases} U = ax^2 + b\lambda^2 + c\mu^2, \\ V = \alpha x^2 + \beta\lambda^2 + \gamma\mu^2, \\ \Delta = U.V \end{cases}$$

seien. Wenn nun $mx + n\lambda + p\mu = 0$ die Gleichung der den beiden Kegelschnitten $U = 0$, $V = 0$ gemeinschaftlichen Tangente sein soll, so müssen die Coëfficienten in der angegebenen Gleichung der gemeinschaftlichen Tangente den beiden folgenden Gleichungen genügen:

$$(77.)\quad \begin{cases} \frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b} + \frac{p^2}{c} = 0, \\ \frac{m^2}{\alpha} + \frac{n^2}{\beta} + \frac{p^2}{\gamma} = 0, \end{cases}$$

woraus sich folgende Werthe von m^2, n^2, p^2 ergeben:

$$(78.)\quad \begin{cases} m^2 = a\alpha(b\gamma - c\beta), \\ n^2 = b\beta(c\alpha - a\gamma), \\ p^2 = c\gamma(a\beta - b\alpha). \end{cases}$$

Da die Gleichungen (77.) ungeändert bleiben, wenn man m in $-m$, oder n in $-n$, oder p in $-p$ verändert, so sieht man, dafs die Gleichungen der 4 gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte U und V folgende sein werden:

$$(79.)\quad \begin{cases} mx + n\lambda + p\mu = 0, \\ mx + n\lambda - p\mu = 0, \\ mx - n\lambda + p\mu = 0, \\ -mx + n\lambda + p\mu = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit Π das Product der Theile links in diesen Gleichungen, so wird

$$(80.) \quad \Pi = m^4x^4 + n^4\lambda^4 + p^4\mu^4 - 2n^2p^2\lambda^2\mu^2 - 2p^2m^2\mu^2x^2 - 2m^2n^2x^2\lambda^2$$

und $\Pi = 0$ die Gleichung der 4 gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte.

Man wird nun bemerken, dafs der Ausdruck

$$\Pi + 4a\alpha b\beta c\gamma U.V$$

ein vollständiges Quadrat ist, so dafs sich, wenn man mit u den Ausdruck

$$(81.) \quad u = a\alpha(b\gamma + c\beta)x^2 + b\beta(c\alpha + a\gamma)\lambda^2 + c\gamma(a\beta + b\alpha)\mu^2$$

bezeichnet, die identische Gleichung

$$(82.) \quad \Pi + 4a\alpha b\beta c\gamma U.V = u^2$$

findet. Diese identische Gleichung, geometrisch gedeutet, giebt den bekannten Satz, dafs die gemeinschaftlichen Tangenten zweier beliebigen Kegelschnitte diese Curven in 8 Puncten berühren, welche wieder auf einem Kegelschnitt liegen.

Wenn man

$$(83.) \quad \begin{cases} \nabla = 4a\alpha b\beta c\gamma U.V, \\ \Pi = 4F_{23}F_{14}F_{24}F_{13} \end{cases}$$

setzt, so wird die identische Gleichung (82.) zu

$$(84.) \quad \nabla = u^2 - 4F_{23}F_{14}F_{24}F_{13}.$$

Die 4 lineären Factoren, in welche Π zerfällt, sind nach (79.) bekannt. Bezeichnet man nämlich durch A, B, C, D noch zu bestimmende Constanten, so wird:

$$(85.) \quad \begin{cases} F_{23} = (mx + n\lambda + p\mu)A, \\ F_{14} = (mx + n\lambda - p\mu)B, \\ F_{24} = (mx - n\lambda + p\mu)C, \\ F_{13} = (-mx + n\lambda + p\mu)D. \end{cases}$$

Diese 4 Constanten, zwischen welchen, wegen der 2ten Gleichung (83.), die Relation

$$(86.) \quad 4ABCD = -1$$

Statt hat, werden nun so zu bestimmen sein, dafs

$$(87.) \quad u = -F_{12}F_{34} + F_{23}F_{14} + F_{24}F_{13}$$

ist, oder, dafs der Theil rechts der daraus folgenden Gleichung

$$(88.) \qquad F_{12}F_{34} = -u + F_{23}F_{14} + F_{24}F_{13}$$

in zwei lineäre Factoren F_{12}, F_{34} zerfällt, welche wir hierdurch kennen lernen.

Wenn wir der Kürze wegen $AB = E$ setzen, so ist, weil $CD = -\frac{1}{4E}$:

$$(89.) \qquad \begin{cases} F_{23}F_{14} = \{(mx+n\lambda)^2 - p^2\mu^2\}E, \\ F_{24}F_{13} = \{(mx-n\lambda)^2 - p^2\mu^2\}\frac{1}{4E}. \end{cases}$$

Man wird nun bemerken, dafs der Theil rechts der Gleichung (88.) aus den Quadraten der Variabeln x, λ, μ und dem einzigen Product $x\lambda$ zusammengesetzt ist. Soll aber ein solcher Ausdruck in zwei lineäre Factoren zerfallen, so mufs die Summe der in μ^2 multiplicirten Glieder verschwinden. Setzen wir die Summe der in μ^2 multiplicirten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (88.) gleich 0, so erhalten wir zur Bestimmung von E die quadratische Gleichung:

$$(90.) \qquad E^2 + E\frac{a\beta+b\alpha}{a\beta-b\alpha} + \tfrac{1}{4} = 0,$$

woraus sich durch Auflösung

$$(91.) \qquad \begin{cases} E = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(a\beta)}+\sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{(a\beta)}-\sqrt{(b\alpha)}}, \\ \frac{1}{4E} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(a\beta)}-\sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{(a\beta)}+\sqrt{(b\alpha)}} \end{cases}$$

ergiebt. Setzt man endlich die Werthe von u aus (81.) und von $F_{23}F_{14}$ und $F_{24}F_{13}$ aus (89.) in (88.), so erhält man:

$$(92.) \qquad F_{12}F_{34} = \frac{2}{a\beta-b\alpha}\{x^2n^2a\alpha - 2x\lambda nm\sqrt{(a\alpha b\beta)} + \lambda^2m^2b\beta\}.$$

Demnach ist:

$$(93.) \qquad \begin{cases} F_{12}F_{34} = \dfrac{2}{a\beta-b\alpha}\{xn\sqrt{(a\alpha)} - \lambda m\sqrt{(b\beta)}\}^2, \\ F_{23}F_{14} = -\frac{1}{2}\dfrac{(\sqrt{(a\beta)}+\sqrt{(b\alpha)})^2}{a\beta-b\alpha}\{(mx+n\lambda)^2 - p^2\mu^2\}, \\ F_{24}F_{13} = \frac{1}{2}\dfrac{(\sqrt{(a\beta)}-\sqrt{(b\alpha)})^2}{a\beta-b\alpha}\{-(mx-n\lambda)^2 + p^2\mu^2\}, \end{cases}$$

und man kann setzen:

$$(94.)\quad \begin{cases} F_{12} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{(a\beta-b\alpha)}}\{nz\sqrt{(a\alpha)}-m\lambda\sqrt{(b\beta)}\}, \\ F_{34} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{(a\beta-b\alpha)}}\{nz\sqrt{(a\alpha)}-m\lambda\sqrt{(b\beta)}\}, \\ F_{23} = -\dfrac{\sqrt{(a\beta)}+\sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2}\sqrt{(a\beta-b\alpha)}}\{mz+n\lambda+p\mu\}, \\ F_{14} = +\dfrac{\sqrt{(a\beta)}+\sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2}\sqrt{(a\beta-b\alpha)}}\{mz+n\lambda-p\mu\}, \\ F_{24} = +\dfrac{\sqrt{(a\beta)}-\sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2}\sqrt{(a\beta-b\alpha)}}\{mz-n\lambda+p\mu\}, \\ F_{13} = +\dfrac{\sqrt{(a\beta}-\sqrt{(b\alpha)}}{\sqrt{2}\sqrt{(a\beta-b\alpha)}}\{-mz+n\lambda+p\mu\}; \end{cases}$$

welche Ausdrücke folgender Gleichung identisch genügen:

$$(95.)\quad \nabla = 4a\alpha b\beta c\gamma UV$$
$$= F_{12}^2F_{34}^2+F_{23}^2F_{14}^2+F_{13}^2F_{24}^2-2F_{23}F_{14}F_{13}F_{24}-2F_{13}F_{24}F_{12}F_{34}-2F_{12}F_{34}F_{23}F_{14}.$$

Ich will diese Abhandlung nicht schliefsen, ohne noch auf eine allgemeine Eigenschaft der 56 Berührungspuncte der 28 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung hinzuweisen.

Man weifs, dafs durch die 56 Berührungspuncte einer beliebig gegebenen Curve 4ter Ordnung eine Curve 14ter Ordnung hindurchgeht (*Crelle's* Journ. Bd. 41. p. 292). Durch die Verbindung der Gleichung der gegebenen Curve mit der Gleichung der genannten Curve 14ten Grades kann man eine unendliche Zahl von Curven 14ten Grades bilden, welche ebenfalls durch jene 56 Berührungspuncte der Doppeltangenten hindurchgehen. Da es nun nach (§. 15.) 315 verschiedene Kegelschnitte giebt, welche von je 8 von den 56 Berührungspuncten der Doppeltangenten hindurchgehen, welchen Satz Herr *Salmon* zuerst veröffentlicht hat, so drängt sich die Frage auf, ob unter jenen Curven 14ten Grades nicht eine oder mehrere in 7 Kegelschnitte zerfällt. In der That finden sich leicht, gleich wie bei Herrn *Salmon,* 7 solcher Kegelschnitte *ab* etc. Ich bezeichne dieselben in dem Folgenden durch die Doppeltangenten, durch deren Berührungspuncte sie hindurchgehen, nämlich

a.	12	23	34	41,
b.	13	35	56	61,
c.	15	58	87	71,
d.	24	45	57	72,
e.	26	64	48	82,
f.	67	73	38	86,
g.	18	25	36	47.

Mit Hülfe der Tafel (§. 14.) lassen sich aus dieser Combination von 7 Kegelschnitte leicht andere Combinationen von 7 Kegelschnitten ableiten, welche ebenfalls durch sämmtliche Berührungspuncte der Doppeltangenten hindurchgehen. Es wäre aber interessant, zu erfahren, wie viele solcher Combinationen es überhaupt giebt.

Die drei Kegelschnitte a, b, c lassen sich auch durch zwei Curven 3ter Ordnung h, i ersetzen, welche durch dieselben Berührungspuncte der Doppeltangenten als die Kegelschnitte hindurchgehen, nämlich

h.	12	23	35	58	87	71,
i.	14	43	31	16	65	51,

oder durch die beiden Curven 3ter Ordnung h', i',

h'.	34	41	17	78	85	53,
i'.	12	23	31	15	56	61.

Eben so lassen sich die Kegelschnitte d, e, f durch die Curven dritter Ordnung:

k.	24	45	57	76	68	82,
l.	26	64	48	83	37	72,

oder durch die Curven 3ter Ordnung k', l',

k'.	24	48	83	37	76	62,
l'.	45	57	72	28	86	64,

ersetzen; was aus den in (§. 14.) angeführten Sätzen erhellet.

Königsberg im August 1853.

18.

Über algebraische Curven und Flächen.

(Vom Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

Zahl der Normalen aus einem Puncte auf eine algebraische Curve, und Eigenschaften der Evolute der letztern.

I. Die Frage: *„Wieviele Normalen einer gegebenen allgemeinen algebraischen Curve n^{ten} Grads C^n durch irgend einen in ihrer Ebene gegebenen Punct P gehen?"* ist gleichbedeutend mit derjenigen: *„Von der wievielten Classe die Evolute der gegebenen Curve sei?"* Diese Frage läfst sich unter andern auf folgende drei Arten leicht beantworten.

1°. Wird die gegebene Curve C^n in ihrer Ebene um den gegebenen Punct P beliebig herumbewegt und in der neuen Lage durch C_1^n bezeichnet, so schneiden sich beide Curven in n^2 Puncten Q; und bewegt man nun die Curve C_1^n wieder zurück, bis sie im Begriff ist auf die anfängliche Curve C^n zu fallen, so ändern sich die n^2 Schnittpuncte Q und im letzten Moment sind sie gerade die Fufspuncte der aus dem Pol P auf die Curve C^n zu fällenden Normalen, deren Zahl somit $= n^2$ ist, und durch deren Fufspuncte, da sie als die Schnitte von C^n und C_1^n anzusehen sind, unendlich viele andere Curven n^{ten} Grads, ein Büschel Curven n^{ten} Grads, gehen. Durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ der n^2 Fufspuncte Q sind daher die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ übrigen bestimmt.

2°. Denkt man sich in der Ebene der gegebenen Curve C^n irgend einen Kegelschnittbüschel $B(C^2)$, d. h. alle Kegelschnitte, welche irgend 4 reelle oder imaginäre Puncte gemein haben, so giebt es unter denselben $n(n+2.2-3) = n(n+1)$, welche die Curve C^n berühren *). Läfst man von den 4 Grundpuncten dieses Büschels zwei und zwei zusammenfallen, so dafs sich die Kegelschnitte in zwei Puncten (reell oder imaginär) berühren, so ist die Berührungssehne, doppelt gedacht, als ein zum Büschel $B(C^2)$ gehöriger Kegelschnitt anzusehen, so wie jeder ihrer n Puncte, in welchen sie die Curve C^n trifft, als einer jener $n(n+1)$ Berührungspuncte, so dafs also

---

*) S. Monatsbericht der Berliner Akad. d. Wissenschaften, vom August 1848; oder Bd. 47. S. 6 dies. Journals.

die Curve C^n nur noch von n^2 der übrigen, eigentlichen Kegelschnitte berührt wird. Da nun, wie *Poncelet* zuerst gezeigt hat, ein System concentrische Kreise als ein Büschel sich in zwei Puncten berührende Kegelschnitte anzusehen sind, welche die im Unendlichen liegende Gerade G_∞ zur ideellen Berührungssehne haben; so folgt also: ***dafs es unter allen um den gegebenen Punct P beschriebenen Kreisen, im Allgemeinen, n^2 solche giebt, welche die gegebene Curve C^n berühren. Die nach den Berührungspuncten gezogenen Radien der Kreise, sind die durch den Punct P gehenden Normalen der Curve C^n.***

3°. Aus den Untersuchungen, auf welche der citirte Monatsbericht sich bezieht, namentlich aus der daselbst bereits erwähnten Eigenschaft (S. 2): ***„dafs die algebraischen Curven durch projectivische Curven-Büschel niedrigern Grades erzeugt werden,"*** ergiebt sich die dritte Art die vorgelegte Frage zu beantworten, aus der zugleich noch einige interessante Umstände hervorgehen, die ich kurz andeuten will.

Mit der Curve C^n in gleicher Ebene sei noch irgend ein Kegelschnitt P^2 gegeben. Von einem beliebigen Pol R seien die erste Polare in Bezug auf C^n und die Polare in Bezug auf P^2 beziehlich C^{n-1} und P^1; diese Polaren schneiden einander in $n-1$ Puncten Q, und die reciproken Polaren jedes dieser Puncte Q gehen durch jenen Pol R, d. h. die $(n-1)$te Polare in Bezug auf C^n und die Polare in Bezug auf P^2, beziehlich C^1 und P_1^1, von jedem der $n-1$ Puncte Q, gehen durch R. Bewegt sich der Pol R in einer Geraden G, so bilden seine Polaren C^{n-1} und P^1 zwei Büschel $B(C^{n-1})$ und $B(P^1)$ mit beziehlich $(n-1)^2$ Grundpuncten C und 1 Grundpunct P; diese Puncte sind zugleich die Pole der Geraden G in Bezug auf die gegebenen Curven C^n und P^2, nämlich G ist die $(n-1)^{te}$ Polare jedes der $(n-1)^2$ Puncte C in Bezug auf C^n, so wie die Polare von P in Bezug auf P^2. Die Büschel $B(C^{n-1})$ und $B(P^1)$ sind, wenn man die demselben Pol R entsprechenden Glieder C^{n-1} und P^1 als einander entsprechend annimmt, projectivisch und erzeugen eine Curve n^{ten} Grads, d. h. der Ort der $n-1$ Schnitte Q je zweier entsprechenden Glieder C^{n-1} und P^1 ist eine Curve n^{ten} Grads Q^n, welche namentlich auch durch die genannten Grundpuncte $(n-1)^2 C$ und $1P$ geht. Jeder der n Schnitte der Curve Q^n mit der Geraden G soll Q_1 heifsen; (dieselben werden unter andern durch eine metrische Relation bestimmt, die zwischen ihnen und den Puncten statt findet, in welchen die Gerade G von den beiden Basen C^n und P^2 geschnitten wird). Da nach der schon ge-

nannten Reciprocität, umgekehrt von jedem Puncte Q, in der Curve Q^n, die polaren Geraden C^1 und P_1^1 in Bezug auf die Basen C^n und P^2 durch den correspondirenden Pol R in der Geraden G gehen, so werden also jedes Paar Polaren C^1 und P_1^1 parallel laufen, wenn die Gerade G ins Unendliche versetzt, wenn sie G_∞ wird; und wird dabei noch der Kegelschnitt P^2 als Kreis angenommen, so stehen C^1 und P_1^1 auf der Geraden QP senkrecht, da P, als Pol von G_∞, nunmehr der Mittelpunct von P^2 ist. Unter diesen Annahmen wird also, wie man sieht, die Ortscurve Q^n, oder zur Unterscheidung Q_0^n, durch die Basis C^n und durch den Mittelpunct P des Kreises P^2 allein bestimmt, und zwar wie folgt:

„Der Ort desjenigen Pols Q, dessen $(n-1)^{te}$ Polare C^1 in Bezug auf die gegebene Basis C^n auf der aus dem Pol nach einem gegebenen festen Puncte P gezogenen Geraden QP senkrecht steht, ist eine Curve n^{ten} Grads Q_0^n, welche namentlich auch durch diesen festen Punct P, so wie durch die $(n-1)^2$ Pole C der Geraden G_∞ in Bezug auf die Basis C^n geht." *„Ändert der Punct P seine Lage, während die Basis C^n fest bleibt, so ändert sich auch die Curve Q_0^n, aber sie geht stets durch die festen $(n-1)^2$ Pole C und hat auch mit der Geraden G_∞ unveränderliche n Schnitte Q_1, so dafs also ihre n Asymptoten constante Richtung behalten, sich selbst parallel bleiben."* (Die Unveränderlichkeit der n Puncte Q_1 in der Geraden G_∞ wird dadurch bewirkt, dafs nach einem *Poncelet*'schen Satze *„alle Kreise P^2 in der Ebene diese Gerade G_∞ zur gemeinschaftlichen ideellen Secante haben."*) Die auf diese Weise bestimmte Curve Q_0^n schneidet die Basis C^n in n^2 Puncten $Q_0 (= Q)$; die Polare C^1 jedes dieser Puncte ist zugleich Tangente der Basis C^n in demselben, und somit die Gerade Q_0P die zugehörige Normale, woraus wiederum hervorgeht, *dafs aus jedem Punct P je n^2 Normalen PQ_0 auf die Basis C^n gehen.* Alle Umstände zusammengefafst geben folgenden Satz:

„Aus jedem Puncte P in der Ebene einer gegebenen Curve n^{ten} Grads C^n gehen n^2 Normalen PQ_0 auf die letztere; die n^2 Fufspuncte Q_0 derselben sammt dem Pol P liegen allemal in irgend einer andern bestimmten Curve n^{ten} Grads Q_0^n, so dafs es also eben soviele solche Curven giebt, als die Ebene Puncte enthält, indem jedem Pol P eine ihm eigenthümlich zugehörige Curve Q_0^n entspricht; und zwar haben alle diese Curven n^2-n+1 bestimmte feste Puncte gemein, nämlich die $(n-1)^2$ Pole C der Geraden G_∞ in Bezug auf die Basis C^n, und n bestimmte

Puncte Q_1 in dieser Geraden selbst; vermöge dieser letztern Puncte Q_1 haben die Asymptoten aller Curven Q_0^n die nämlichen bestimmten Richtungen." Und umgekehrt: „*Jede durch die genannten n^2-n+1 Puncte C und Q_1 gehende Curve n^{ten} Grads, ist eine der genannten Curven Q_0^n und schneidet die gegebene Basis C^n in solchen n^2 Puncten Q_0, deren zugehörige Normalen in einem Puncte P jener Curve sich treffen, der ihr entsprechender Pol ist.*" „*Diejenigen unter allen diesen Curven Q_0^n, welche durch irgend einen gegebenen Punct Q gehen, bilden einen Curvenbüschel $B(Q_0^n)$ mit n^2 Grundpuncten, nämlich aufser jenen n^2-n+1 Puncten C und Q_1, und dem gegebenen Puncte Q, haben sie noch andere bestimmte $n-2$ Puncte $[Q]$ gemein, welche mit dem gegebenen Q in derjenigen Geraden, etwa L, liegen, die aus dem letztern auf seine polare Gerade C^1 senkrecht gezogen wird; durch jeden dieser neuen $n-2$ Puncte Q wird der nämliche Curvenbüschel $B(Q_0^n)$ bestimmt, und die Polare C^1 eines jeden derselben steht auf der Geraden L senkrecht; in dieser Geraden L liegen zugleich auch die allen diesen Curven, $B(Q_0^n)$, entsprechenden Pole P, so dafs der n^{te} Schnitt jeder dieser Curven mit L (aufser den $n-1$ Schnitten Q) gerade ihr Pol P ist; diejenigen $n-1$ Curven Q_0^n, deren Pole P respective in die $n-1$ Puncte Q fallen, berühren daselbst die Gerade L; wird in jedem Pol P an die ihm zugehörige Curve Q_0^n die Tangente T gelegt, so ist der Ort aller dieser Tangenten eine Curve n^{ter} Classe T^n, welche die Gerade L zur $(n-1)$fachen Tangente hat; ferner liegen die $n-1$ Puncte Q allemal mit den $(n-1)^2$ festen Polen C zusammen in einer Curve $(n-1)^{ten}$ Grads C^{n-1}, welche die erste Polare des im Unendlichen liegenden Punctes der genannten Polare C^1 in Bezug auf die Basis C^n ist.*" Umgekehrt: „*Liegen mehrere Pole P in irgend einer gegebenen Geraden L, so schneiden sich die ihnen entsprechenden Curven Q_0^n in bestimmten $n-1$ Puncten Q auf derselben Geraden, etc.*" „*Soll eine der Curven Q_0^n durch irgend zwei gegebene Puncte Q gehen, so ist sie, im Allgemeinen, absolut bestimmt; denn die aus den zwei Puncten Q auf ihre respectiven polaren Geraden C^1 senkrecht gezogenen Geraden L schneiden sich im Pol P der verlangten Curve Q_0^n.*"

Dieser Satz mag noch in folgender Hinsicht ergänzt werden. Die gegebene Basis C^n wird von der im Unendlichen liegenden Geraden G_∞ in n Puncten A geschnitten. Man denke alle möglichen Curven n^{ten} Grads, welche die gegebene in jedem der n Puncte A $n$punctig berühren, so hat

man einen speciellen Curvenbüschel $B(C^n)$, dessen n^2 Grundpuncte nur in den n Puncten A liegen (so dafs insbesondere auch die $n$fache Gerade G_∞ als ein Glied desselben anzusehen ist). Dabei haben alle diese Curven jene mehrgenannten n^2-n+1 Puncte C und Q_1, im obigen Sinne, gemein, und die jedem Pol Q, in Bezug auf alle Curven, entsprechenden Polaren C^1 sind jedesmal unter sich parallel. Dadurch wird bewirkt: *„dafs, wenn aus irgend einem Pol P auf alle Curven $B(C^n)$ Normalen gezogen werden, nämlich auf jede Curve n^2 Normalen, dann die sämmtlichen Fufspuncte Q_0 in einer und derselben Curve Q_0^n liegen und zwar sie ganz erfüllen; oder mit andern Worten: dafs jede beliebige Gerade N, im Allgemeinen, auf je $n-1$ der gegebenen Curven $B(C^n)$ normal steht, also $n-1$ Fufspuncte Q_0 hat, und dafs, wenn sich dieselbe um irgend einen in ihr angenommenen Pol P herumbewegt, dann jene $n-1$ Puncte Q_0 die diesem Pol P entsprechende Curve Q_0^n beschreiben; und dafs umgekehrt, jede durch die n^2-n+1 festen Puncte C und Q_1 gehende Curve n^{ten} Grads Q_0^n die gegebenen Curven $B(C^n)$ so schneidet, dafs die Normalen der letztern in ihren respectiven Schnittpuncten sämmtlich in irgend einem und demselben Puncte P sich treffen, der allemal in jener Curve Q_0^n liegt."*

„Wird in jedem Puncte Q_0, in welchem die Transversalcurve Q_0^n eine der gegebenen Curven $B(C^n)$ schneidet, an letztern die Tangente T gelegt, so umhüllen alle diese Tangenten eine Curve $(2n-1)^{ter}$ Classe T^{2n-1}, welche die Gerade G_∞ zur nfachen Tangente hat."

Es wird nicht uninteressant sein, wenn wir die vorstehenden Sätze für den einfachsten Fall kurz wiederholen, wo $n=2$, also die angegebene Basis C^n nur ein Kegelschnitt C^2 ist, und eben so alle Curven Q_0^n nur Kegelschnitte Q_0^2 sind. Für diesen Fall reduciren sich die $(n-1)^2$ Pole C auf einen einzigen, auf den Mittelpunct C von C^2; die $2\,(=n)$ Puncte Q_1 auf der Geraden G_∞, sind die im Unendlichen liegenden Puncte der Axen X und Y der Basis C^2; und da nun jede Curve Q_0^2 durch diese 2 Puncte Q_1 geht, so folgt, *dafs dieselben sämmtlich gleichseitige Hyperbeln sind, deren Asymptoten den Axen X, Y der Basis C^2 parallel laufen.* Danach hat man folgenden, zum Theil bekannten, speciellen Satz:

„Aus jedem Punct P in der Ebene eines gegebenen Kegelschnitts C^2 gehen 4 Normalen PQ_0 auf den letztern (reell oder imaginair); die 4 Fufspuncte Q_0 derselben und der Pol P liegen allemal mit dem Mittelpunct C des Kegelschnitts und den unendlich entfernten

Puncten, $2Q_1$, seiner Axen X, Y zusammen in einer gleichseitigen Hyperbel Q_0^2, so dafs also alle, auf diese Weise bestimmten gleichseitigen Hyperbeln, die drei Puncte C und $2Q_1$ gemein, und vermöge der $2Q_1$ ihre Asymptoten den Axen X, Y parallel haben." Und umgekehrt: „*Jede gleichseitige Hyperbel Q_0^2, welche durch den Mittelpunct C und durch die im Unendlichen liegenden Puncte, $2Q_1$, der Axen des gegebenen Kegelschnitts C^2 geht, schneidet den letztern in 4 solchen Puncten Q_0, deren zugehörige Normalen in irgend einem Puncte P der Hyperbel sich treffen. Bewegt sich der Pol P in irgend einer gegebenen Geraden L, so geht die ihm entsprechende gleichseitige Hyperbel Q_0^2 stets durch einen bestimmten Punct Q in dieser Geraden; und umgekehrt: alle gleichseitigen Hyperbeln Q_0^2, welche, aufser durch jene drei festen Puncte C und $2Q_1$, noch durch irgend einen gegebenen 4ten Punct Q gehen, und somit einen Büschel $B(Q_0^2)$ bilden, haben ihre Pole P auf derjenigen Geraden L, welche durch den Punct Q geht und auf dessen Polare C^1 (in Bezug auf die Basis C^2) senkrecht steht.*" „*Soll die gleichseitige Hyperbel Q_0^2 durch irgend zwei gegebene Puncte Q gehen, so ist sie bestimmt, und die aus diesen Puncten auf deren respective Polaren C^1 gefällten Perpendikel L treffen sich im Pol P derselben.*" — Ferner: „*Denkt man sich, statt der einzelnen Basis C^2, einen Kegelschnitt-Büschel $B(C^2)$, welche einander in zwei (reellen oder imaginären) Puncten A auf der Geraden G_∞ berühren, oder, was dasselbe ist, alle Kegelschnitte, die dem gegebenen C^2 ähnlich, und mit ihm ähnlich liegend und concentrisch sind, und fället aus irgend einem Pol P Normalen auf dieselben, so liegen sämmtliche Fufspuncte Q_0 dieser Normalen in einer der genannten gleichseitigen Hyperbeln Q_0^2 und erfüllen sie ganz; und umgekehrt: jede durch die drei Puncte C und $2Q_1$ gehende gleichseitige Hyperbel Q_0^2 schneidet sämmtliche gegebenen Kegelschnitte $B(C^2)$ in solchen Puncten Q_0, deren zugehörige Normalen durch einen und denselben Punct P der nämlichen Hyperbel gehen.*" „*Liegt der Pol P, aus welchem die Normalen auf die gegebenen Curven $B(C^2)$ gefället werden, insbesondere in einer der beiden Axen X oder Y, so zerfällt die entsprechende gleichseitige Hyperbel Q_0^2 in zwei Gerade, wovon die eine jene Axe selbst ist, und die andere auf ihr senkrecht steht. Eben so zerfällt Q_0^2 in zwei Gerade, wenn der Pol P in der Geraden G_∞ liegt, wovon die eine diese Gerade selbst ist, und die andere durch den Mittelpunct C geht.*" — Einen wesentlichen Theil dieser

die Kegelschnitte betreffenden Eigenschaften hat *Poncelet* zuerst gegeben (*Traité des propriétés projectives des figures p. 288 art. 492*), und denselben Theil hat auch *Joachimsthal* behandelt (*Crelle's* Journ. für Mathem. Bd. 26. Heft II.). Mit den vorstehenden Sätzen steht auch noch der folgende in unmittelbarer Beziehung, nämlich:

„*Werden in den je 4 Fufspuncten Q_0 der aus irgend einem Puncte P auf die gegebene Basis C^2 gefällten Perpendikel an die Basis Tangenten T gelegt, so berühren diese 4 Tangenten T mit den beiden Axen X und Y zusammen allemal irgend eine Parabel, deren Leitlinie durch den Mittelpunct C der Basis geht; und umgekehrt: jede Parabel, welche die Axen der Basis C^2 berührt, hat mit dieser 4 solche Tangenten T gemein, welche die Basis in 4 Puncten Q_0 berühren, deren zugehörige Normalen allemal in irgend einem Puncte P zusammentreffen. Danach entspricht also jedem Puncte P in der Ebene eine bestimmte, die beiden Axen X und Y der Basis C^2 berührende Parabel, und auch umgekehrt; bewegt sich der Punct P in einer gegebenen Geraden L, so berührt die ihm entsprechende Parabel stets irgend eine bestimmte andere Gerade, und auch umgekehrt; liegt der Punct P insbesondere in der Evolute der Basis C^2, so berührt die Parabel die Basis, und auch umgekehrt.*"

II. Die gesammten Normalen jeder Curve C_0 berühren oder sind Tangenten einer andern Curve E_0, die ihre *Evolute* heifst. Durch die vorstehende Betrachtung haben wir bereits die Classe der Evolute E_0 gefunden; nämlich sie ist von der $n^{2\text{ten}}$ Classe, wenn die gegebene Basis C_0 vom n^{ten} Grad $= C^n$ ist. Durch die eigenthümliche Beziehung, welche beide Curven zu einander haben, werden auch ihre Eigenschaften, namentlich ihre singulären Elemente (Puncte und Tangenten) in gegenseitige Abhängigkeit gesetzt, und zwar wie folgt.

a. Jedem Wendepunct der Basis C^n entspricht ein im Unendlichen liegender Punct der Evolute E_0, oder die Normale im Wendepunct der erstern ist eine Asymptote der letztern, und auch umgekehrt, so dafs also E_0 eben so viele geradlinige Asymptoten hat, und die Gerade G_∞ in eben so vielen Puncten B schneidet, als die Basis C^n Wendepuncte hat, also im Allgemeinen $3n(n-2)$.

b. Jedem der im Unendlichen liegenden n Puncte A der Basis C^n entspricht ein Rückkehrpunct R_1 der Evolute E_0, der ebenfalls im Unend-

lichen, auf der Geraden G_∞ liegt, indem diese die zugehörige Rückkehrtangente ist; demnach ist also die Gerade G_∞ eine $n$fache Rückkehrtangente der Evolute E_0. Die Tangenten der Basis in den n Puncten A sind ihre Asymptoten; nach den zu diesen Asymptoten senkrechten Richtungen liegen die n Rückkehrpuncte R_1, d. h. die aus irgend einem Punct auf die Asymptoten gefällten Perpendikel gehen durch die correspondirenden Rückkehrpuncte R_1 auf der Geraden G_∞. — Da die Gerade G_∞ in jedem der n Puncte R_1 mit der Curve E_0 drei Puncte gemein hat, was mit den vorgenannten $3n(n-2)$ Puncten $B(a)$ zusammen

$$3n + 3n(n-2) = 3n(n-1)$$

gemeinschaftliche Puncte der G_∞ mit E_0 ausmacht, so folgt also, ***dafs die Evolute E_0 vom $3n(n-1)^{ten}$ Grad ist.***

c. Jedem Scheitel S, d. h. jedem solchen Punct der Basis C^n, in welchem sie von einem Kreise 4punctig berührt wird, entspricht abermals ein Rückkehrpunct R der Evolute E_0, und auch umgekehrt. Daraus geht hervor, dafs die vorigen n Puncte A ebenfalls als solche Scheitel S anzusehen sind, die sich jedoch von diesen dadurch unterscheiden, dafs der zugehörige, vierpunctig berührende Kreis unendlich grofs ist, und zwar aus der doppeltgedachten entsprechenden Asymptote besteht.

d. Steht eine Gerade in zwei verschiedenen Puncten auf der Basis C^n, normal, so dafs sie eine Doppelnormale ist, so ist sie auch eine Doppeltangente der Evolute E_0, und auch umgekehrt. Da nun die Gerade G_∞ eine $n$fache Tangente der E_0 ist (*b.*), so kann man sie, wenn es die Umstände erheischen, auch als eine $n$fache Normale der C^n ansehen.

e. Einem Rückkehrpunct der Basis C^n entspricht ein Wendepunct der Evolute E_0, und auch umgekehrt. Wenn aber die Basis eine allgemeine freie Curve n^{ten} Grads ist, so hat sie keinen Rückkehrpunct, und in diesem Falle hat dann auch die Evolute E_0 keinen *eigentlichen* Wendepunct.

Hieraus, und mit Hülfe der im oben citirten Monatsbericht gegebenen Formeln, ergiebt sich folgender Satz:

„Die Evolute E_0 einer allgemeinen Curve n^{ten} Grads C^n ist eine Curve

$$1^\circ. \quad n^{2ter} \text{ Classe und } 3n(n-1)^{ten} \text{ Grads;}$$

dieselbe hat, im Allgemeinen, keinen eigentlichen Wendepunct, und nur

$$2^\circ. \quad 3n(n-2)$$

geradlinige Asymptoten, die zugleich die Normalen der Curve C^n in ihren Wendepuncten sind; die übrigen $3n$ Asymptoten fallen auf die im Unendlichen liegende Gerade G_∞, indem diese eine nfache Rückkehrtangente der Curve E_0 ist, und zwar liegen die n Rückkehrpuncte R_1 nach den zu den Asymptoten der Basis C^n senkrechten Richtungen. Im Ganzen hat die Evolute E_0

$$3^\circ. \quad 3n(2n-3)$$

Rückkehrpuncte R_1 und R, nämlich aufser den genannten n Puncten R_1 noch $2n(3n-5)$ solche Rückkehrpuncte R, welche die Mittelpuncte derjenigen Kreise sind, welche die Basis in den correspondirenden Puncten S vierpunctig berühren, so dafs also die gegebene Basis C^n

$$4^\circ. \quad 2n(3n-5)$$

solche Scheitel S hat, in denen sie von einem, nicht unendlich grofsen, Kreise vierpunctig berührt wird. Ferner hat die Evolute E_0 im Ganzen

$$5^\circ. \quad \tfrac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-3)$$

Doppeltangenten, oder die C^n hat soviele Doppelnormalen; dabei ist jedoch die Gerade G_∞ für $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten mitgezählt, so dafs ohne dieselbe, und im engern Sinne, nur

$$6^\circ. \quad \tfrac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-4)$$

Doppeltangenten der E_0 oder Doppelnormalen der C^n statt finden."

Ist die gegebene Basis insbesondere nur vom 2ten oder 3ten Grad, so ergeben sich, gemäfs dieses Satzes, folgende Eigenschaften.

A. Die Evolute E_0 eines allgemeinen Kegelschnitts C^2 ist eine Curve 4ter Classe und 6ten Grads (1°.), wie bekannt; dieselbe hat keinen eigentlichen Wendepunct und auch keine Asymptote (2°.); dagegen hat sie die Gerade G_∞ zur doppelten Rückkehrtangente, und im Ganzen hat sie 6 Rückkehrpuncte (3°.), nämlich $2R_1$ (auf G_∞) und $4R$, die letztern sind die Mittelpuncte derjenigen nicht unendlich grofsen 4 Kreise, welche den Kegelschnitt C^2 in den entsprechenden 4 Scheiteln S (4°.) vierpunctig berühren; ferner hat E_0 im Ganzen 3 Doppeltangenten (5°.), die zugleich Doppelnormalen der C^2 sind; und zwar bestehen dieselben aus der Geraden G_∞ und aus den beiden Axen X und Y (6°.) von C^2, also aus den 3 Axen von C^2, indem auch G_∞ als

Axe anzusehen ist;*) hier sind jedoch X und Y nicht gewöhnliche Doppeltangenten der E_0; sondern sie sind (wie G_∞) doppelte Rückkehrtangenten in 2 und 2 der genannten $4R$, so dafs also die Scheitel dieser Axen X und Y die genannten 4 Scheitel S der Curve C^2 sind. Oder kurz gefafst kann man so sagen: Die drei Axen X, Y und G_∞ des Kegelschnitts C^2 sind zugleich Axen seiner Evolute E_0; dieselben sind Doppelnormalen von C^2 und doppelte Rückkehrtangenten von E_0; ihre 3 Paar Scheitel sind diejenigen 6 Puncte ($4S$ und $2A$), in denen C^2 von einem Kreise vierpunctig berührt wird, und die in ihnen liegenden 3 Paar Rückkehrpuncte ($4R$ und $2R_1$) der E_0, sind die Mittelpuncte dieser Kreise; in je einer Axe (Y oder G_∞) ist das Paar Rückkehrpuncte und Scheitel imaginär, in den beiden andern reell. Die Puncte $2R_1$ auf G_∞ liegen nach den zu den Asymptoten von C^2 senkrechten Richtungen.

B. Die Evolute E_0 einer allgemeinen Curve 3ten Grads C^3 ist eine Curve 9ter Classe und 18ten Grads (1°.); sie hat nur 9 Asymptoten, wovon 3 reell und 6 imaginär sind, aber dazu hat sie die Gerade G_∞ zur dreifachen Rückkehrtangente, was die fehlenden 6 Asymptoten vertritt; ferner hat sie, aufser den 3 Rückkehrpuncten R_1 auf G_∞, noch 24 Rückkehrpuncte R, und diesen entsprechend hat die Basis C^3 24 solche Scheitel S (4°.), in denen sie von Kreisen vierpunctig berührt wird, welche die respectiven Puncte R zu Mittelpuncten haben; ferner hat E_0, aufser der Geraden G_∞, noch 24 Doppeltangenten, die zugleich die sämmtlichen Doppelnormalen der C^3 sind (6°.); etc. — Da die Basis C^3 von der $3\cdot 2 = 6^{\text{ten}}$ Classe ist, so hat sie mit ihrer Evolute E_0 im Ganzen $6\times 9 = 54$ Tangenten T gemein, also:

„Die allgemeine Curve 3ten Grads C^3 hat im Ganzen 54 solche Normalen T, welche zugleich Tangenten derselben sind;" d. h. eine solche T steht in irgend einem Puncte Q normal auf der Curve und berührt sie in einem andern Puncte A. Sei U die Tangente der Curve in Q, so ist der rechte Winkel (TU) der Curve umschrieben, und sein Scheitel Q liegt in derselben und ist zugleich der Berührungspunct des einen Schenkels. *„Es giebt andere bestimmte 54 Puncte Q_1 in der Curve C^3, in welchen der Scheitel eines ihr umschriebenen rechten Winkels liegen kann, aber wobei sie von dessen Schenkeln in andern Puncten berührt wird."* Nämlich:

---

*) Auch bei allgemeiner Betrachtung der Brennpuncte des Kegelschnitts C^2 tritt die Gerade G_∞ als dritte Axe desselben auf, indem man findet, dafs C^2 in seiner Ebene 3 Paar Brennpuncte hat, beziehlich in den 3 Axen X, Y und G_∞, die aber in zwei Axen imaginär und nur in einer reell sind.

*„Der Ort der Scheitel aller der gegebenen Curve C^3 umgeschriebenen rechten Winkel (TU) ist eine Curve 36ten Grads *), und die $3\times 36 = 108$ gegenseitigen Schnittpuncte beider Curven bestehen aus den genannten $54\,Q$ und $54\,Q_1$."*

Ein anderer Lehrsatz ist der:

„Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels (TU) in der gegebenen Curve C^3, während der eine Schenkel U dieselbe stets berührt, so beschreibt der andere Schenkel T (als Tangente) eine Curve 18ter Classe T^{18} und 33ten Grads, welche mit der Evolute E_0 die 9 Asymptoten gemein hat; ihre übrigen 24 Asymptoten fallen auf die Gerade G_∞, und zwar berührt sie diese in den 3 Rückkehrpuncten R_1 der Evolute E_0 mit je 4 Zweigen, so dafs sie die G_∞ zur zwölffachen Tangente hat; etc."

Mit Berücksichtigung der Eigenschaften der in meiner früheren Abhandlung (Bd. 47. S. 43 dieses Journals) durch $\mathfrak{S}^9$ bezeichneten Curve, schliefst man:

„Dafs die allgemeine Curve 3ten Grads C^3, im Ganzen, 33 solche Normalen hat, von welchen sie, aufser dem Fufspuncte Q, in zwei andern Puncten A und B geschnitten wird, deren zugehörige Tangenten parallel sind."

Über die Normalen aus einem Puncte auf eine algebraische Fläche.

III. Die Zahl der Normalen, welche aus irgend einem Puncte auf eine gegebene Fläche n^{ten} Grads gehen, kann durch analoges Verfahren gefunden werden, wie oben für die Curven (I.), und namentlich gewährt auch hier die dritte Verfahrungsart (entsprechend I. 3°.) umfassendere interessante Resultate, auf deren kurze nähere Andeutung ich mich hier beschränke.

***Hülfssatz 1.** Irgend zwei in derselben Ebene liegende Curven n^{ten} und p^{ten} Grads, C^n und D^p, haben, im Allgemeinen,*

$$(n+p-2)^2-(n-1)(p-1)$$

Paare gemeinschaftlich Pole Q_1 und polare Gerade L', d. h., es giebt in

---

*) Der allgemeine Satz heifst: *„Der Ort der Scheitel aller rechten Winkel, welche einer gegebenen Curve k^{ter} Classe umschrieben sind, ist eine Curve k^{2ten} Grads."* — Der Widerspruch, in welchen dieser Satz mit dem bekannten Satze über den Kegelschnitt tritt, ist *nur scheinbar.*

der Ebene die genannte Zahl solcher Pole Q_1, deren $(n-1)^{te}$ und $(p-1)^{te}$ Polaren rücksichtlich der Basen C^n und D^p, beziehlich C^1 und D^1, aufeinander fallen, eine Gerade $(C^1D^1)=L^1$ sind. Ist insbesondere $p=2$, also $D^p=D^2$ nur ein Kegelschnitt, so reducirt sich die Zahl der Pole Q_1 auf

$$n^2-n+1,$$

und diese Zahl bleibt, wenn der Kegelschnitt insbesondere ein Kreis, oder selbst ein imaginärer Kreis wird.

Hülfssatz 2. Jeder Ebene E entsprechen in Bezug auf eine gegebene Fläche n^{ten} Grads F^n je $(n-1)^3$ verschiedene Pole F, d. h. die Ebene ist für jeden dieser Pole die $(n-1)^{te}$ Polare in Bezug auf die Fläche F^n, oder kurz gesagt: sie ist die Polar-Ebene jedes dieser Pole F. Nämlich jedem beliebigen Pol Q entspricht nur eine bestimmte Polar-Ebene F^1, aber dieser entsprechen umgekehrt $(n-1)^3$ verschiedene Pole Q. Die der im Unendlichen liegenden Ebene E_∞ in Bezug auf die gegebene Fläche F^n entsprechenden $(n-1)^3$ Pole sollen durch F_0 bezeichnet werden.

Auf diese Hülfssätze und Erklärungen gestützt, lassen sich die erwähnten Resultate wie folgt angeben.

„In Bezug auf eine gegebene allgemeine Fläche n^{ten} Grads F^n und in Rücksicht auf irgend einen beliebig gewählten festen Punct P ist der Ort desjenigen Pols Q, dessen Polar-Ebene F^1 in Bezug auf die Fläche auf der Geraden, die ihn mit dem festen Puncte verbindet, d. i. auf der jedesmaligen Geraden QP senkrecht steht, eine Raumcurve (Curve doppelter Krümmung) n^2-n+1ten Grads,

$$Q^{n^2-n+1},$$

welche auch durch den Punct P geht und in demselben das aus ihm auf seine Polar-Ebene gefällte Perpendikel zur Tangente hat; für diejenigen Pole $Q_0(=Q)$, in welchen diese Curve die Fläche trifft, wird die entsprechende Polar-Ebene F_0^1 zugleich die Berührungs-Ebene der Fläche in demselben, und somit die Gerade PQ_0 die zugehörige Normale, und folglich gehen aus jedem beliebigen Puncte P, im Allgemeinen,

$$n\times(n^2-n+1)$$

Normalen PQ_0 auf die gegebene Fläche F^n und die $n(n^2-n+1)$ Fußpuncte Q_0 derselben, sammt dem Puncte P, liegen in der genannten Raumcurve Q^{n^2-n+1}." Noch mehr: *„Diese Curve geht auch allemal durch die $(n-1)^3$ Pole F_0 der im Unendlichen liegenden Ebene E_∞ (2.), so wie*

durch n^2-n+1 bestimmte Puncte Q_1 in dieser Ebene, und zwar sind diese Puncte Q_1, nach dem Sinne des ersten Hülfssatzes (1.), die gemeinschaftlichen Pole derjenigen zwei Curven C_∞^n und D_∞^2, in welchen die Ebene E_∞ von der gegebenen Fläche F^n und von irgend einer Kugel F_0^2 geschnitten wird,) wobei also D_∞^2 ein imaginärer Kreis ist (1.). Demnach gehen also die allen Puncten P des Raumes auf diese Weise entsprechenden Curven Q^{n^2-n+1} sämmtlich durch die genannten festen*

$(n-1)^3$ *Pole* F_0 *und* (n^2-n+1) *Puncte* Q_1,

und vermöge der letztern Puncte, Q_1, haben die Asymptoten aller Curven dieselben bestimmten Richtungen, nämlich sie sind nach diesen Puncten gerichtet, so dafs die Asymptoten einer jeden mit den Asymptoten jeder andern parallel sind." Da die aus irgend einem Puncte Q der Curve Q^{n^2-n+2} nach allen andern Puncten derselben gezogenen Geraden in einer Kegelfläche $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grads liegen, welche jenen Punct Q zum Scheitel (Mittelpunct) hat; so kann man auch sagen:

„Die aus irgend einem Puncte P auf die gegebene Fläche F^n gefällten $n(n^2-n+1)$ Normalen PQ_0, nebst den aus P nach jenen festen Puncten, F_0 und Q_1 gezogenen, respective $(n-1)^3$ Geraden PF_0 und n^2-n+1 Geraden PQ_1, alle diese, zusammen $=n(2n^2-3n+3)$ Gerade, sammt dem aus P auf seine Polar-Ebene gefällten Perpendikel, liegen allemal in einer Kegelfläche $n(n-1)^{ten}$ Grads; und eben so liegen die aus jedem der genannten Puncte (Q_0, F_0 und Q_1) nach allen übrigen (und nach P) gezogenen Geraden in einer Kegelschnittfläche desselben Grads, die für die Puncte Q_1 insbesondere in einen Cylinder übergeht."

Auch hier findet eine analoge Ergänzung statt, wie oben (I. 3°.). Man denke sich alle Flächen n^{ten} Grads, welche die gegebene Fläche F^n längs ihrer Schnittcurve C_∞^n mit der Ebene E_∞ überall $n$punctig berühren, d. h. man denke sich den besondern Flächenbüschel $B(F^n)$, dessen Grundcurve (gemeinschaftliche Schnittcurve, die im Allgemeinen eine Raumcurve $n^{2\,\text{ten}}$ Grads ist) aus der $n$fach gedachten Curve C_∞^n besteht, so dafs die $n$fach gedachte Ebene E_∞ als ein Glied dieses Büschels anzusehen ist: so haben alle diese Flächen, $B(F^n)$, die vorgenannten $(n-1)^3$ Pole F_0 der Ebene E_∞, so wie die in dieser Ebene liegenden n^2-n+1 Puncte Q_1 gemein, und die

---

*) Nach *Poncelet's* Satz haben alle Kugeln mit der Ebene E_∞ den nämlichen imaginären Kreis gemein.

jedem beliebigen Pol Q in Rücksicht auf alle Flächen entsprechenden Polar-Ebenen, F^1, sind jedesmal unter sich parallel. Daraus folgt:

„Fället man aus irgend einem Puncte P auf alle Flächen des eben beschriebenen besondern Flächenbüschels $B(F^n)$ Normalen, auf jede Fläche $n(n^2-n+1)$ Normalen PQ_0, so liegen alle diese Normalen in einer und derselben Kegelfläche $n(n-1)^{ten}$ Grads, und ihre sämmtlichen Fufspuncte Q_0 liegen in einer Raumcurve $(n^2-n+1)^{ten}$ Grads, Q^{n^2-n+1}, die sie ganz erfüllen und die allemal (so wie auch der genannte Kegel) durch die mehrgenannten $n(n^2-2n+2)$ festen Puncte F_0 und Q_1 geht."

„Versetzt man den Punct P ins Unendliche, in die Ebene E_∞, so zerfällt die Kegelfläche, so wie auch die Raumcurve Q^{n^2-n+1}, in bestimmte Theile."

In Betreff des obigen Satzes ist zu bemerken, dafs für den Fall, wo die gegebene Fläche F^n nur vom 2ten Grad, $= F^2$, ist, Herr *Terquem* irgendwo zuerst bewiesen hat: *„dafs aus jedem Puncte, im Allgemeinen, je 6 Normalen auf dieselbe gehen, und dafs solche 6 Normalen jedesmal in einer Kegelfläche zweiten Grads liegen."* Gemäfs dem Vorstehenden erhält nun aber dieser Satz folgende Erweiterung. Der Ebene E_∞ entspricht für diesen Fall nur ein einziger Pol F_0, da $(2-1)^3=1$ ist, und zwar ist derselbe der Mittelpunct der gegebenen Fläche F^2; die in E_∞ liegenden n^2-n+1 Puncte Q_1 reduciren sich auf $3Q_1$, und zwar sind sie die im Unendlichen liegenden Puncte der 3 Axen X, Y und Z der Fläche F^2. Danach lautet der vollständigere Satz wie folgt:

*„Auf eine gegebene allgemeine Fläche 2ten Grads F^2 gehen aus jedem beliebigen Puncte P je 6 Normalen PQ_0 (reell oder imaginär); die 6 Fufspuncte Q_0 derselben nebst dem Puncte P liegen allemal mit dem Mittelpuncte F_0 der Fläche und mit den im Unendlichen liegenden 3 Puncten Q_1 ihrer 3 Axen X, Y und Z zusammen in einer Raumcurve 3ten Grads Q^3 *); alle auf diese Weise bestimmten Curven Q^3 haben also die 4 festen Puncte F_0 und $3Q_1$ gemein, und vermöge dieser $3Q_1$ haben ihre Asymptoten dieselben constanten Richtungen, nämlich sie sind sämmtlich den drei Axen der Fläche parallel; und ferner: die 6 Normalen PQ_0 aus jedem Puncte P, nebst den 4 Geraden, die aus demselben nach dem Mittelpunct F_0 und nach den 3 Puncten Q_1, d. i. den drei Axen*

---

*) Die Raumcurve dritten Grads ist durch sechs Puncte bestimmt.

parallel, gezogen werden, sammt dem aus P auf seine Polar-Ebene gefällten Perpendikel, was zusammen 11 durch P gehende Gerade sind, liegen allemal zusammen in irgend einer Kegelfläche 2ten Grads; und eben so liegen die aus dem Mittelpuncte F_0, oder die aus einem der 6 Fufspuncte Q_0 nach den jedesmaligen übrigen 10 Puncten gezogenen 10 Geraden in einer Kegelfläche 2ten Grads, und insbesondere liegen die aus einem der 3 Puncte Q_1 nach den übrigen 10 Puncten gezogenen Geraden, oder die durch die Puncte $6Q_0$, F_0 und P mit einer der 3 Axen X, Y, Z parallel gezogenen 8 Geraden, zusammen in einem gleichseitigen hyperbolischen Cylinder; d. h. werden die 8 Puncte, $6Q_0$, F_0 und P, nach der Richtung einer der drei Axen (etwa X) auf eine zu dieser Axe senkrechte Ebene (etwa auf die Ebene YZ) projicirt, so liegen die neuen 8 Puncte in einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten den jedesmaligen beiden andern Axen (Y und Z) parallel sind." — „*Durch jeden gegebenen Punct Q gehen unendlich viele der genannten Raumcurven Q^3, und die ihnen entsprechenden Pole Q liegen sämmtlich in dem aus jenem Puncte Q auf seine Polar-Ebene F^1 gefällten Perpendikel.*" — Es folgt ferner:

„*Denkt man sich einen solchen besondern Flächenbüschel 2ten Grads $B(F^2)$, welche einander längs eines in der Ebene E_∞ liegenden (reellen oder imaginären) Kegelschnitts C_∞^2 berühren, oder, mit Poncelet zu sprechen, denkt man sich ein System ähnliche, ähnlichliegende und concentrische Flächen zweiten Grads, und fället, aus irgend einem Puncte P Normalen auf dieselben, auf jede Fläche 6 Normalen PQ_0, so liegen deren sämmtliche Fufspuncte Q_0 in einer und derselben Raumcurve 3ten Grads Q^3, welche allemal durch den Mittelpunct F_0 der Flächen und durch die im Unendlichen liegenden 3 Puncte Q_1 ihrer gemeinschaftlichen Axen X, Y und Z geht, so dafs also die 3 Asymptoten der Curve stets diesen Axen parallel sind; und ferner liegen die gesammten Normalen PQ, wozu insbesondere namentlich auch die aus P nach dem Mittelpuncte F_0 und nach den 3 Puncten Q_1 oder den Axen parallel gezogenen vier Geraden gehören, allemal in irgend einer Kegelfläche 2ten Grads F_0^2.*" Liegt der Pol P insbesondere in einer der drei Axen-Ebenen XY, XZ und YZ, so zerfällt die Raumcurve Q^3 in einen in dieser Ebene liegenden Kegelschnitt Q^2 und in eine auf derselben senkrecht stehende Gerade Q^1, und demgemäfs zerfällt die Kegelfläche F_0^2 in zwei Ebenen, wovon die eine die genannte Axen-Ebene selbst ist und die andere darauf senkrecht steht,

durch P und die Gerade Q^1 geht; und liegt ferner der Pol P in einer der drei Axen X, Y und Z, so besteht Q^3 aus drei Geraden, wovon die eine die Axe selbst ist, die beiden andern auf ihr senkrecht stehen und beziehlich den beiden andern Axen parallel sind, so dafs dabei die Kegelfläche F_0^2 aus zwei Axen-Ebenen besteht. Ganz ähnlich verhält es sich, wenn der Pol P insbesondere in der Ebene E_x, oder in einer der drei Geraden X_1, Y_1, Z_1 liegt, in welchen dieselbe beziehlich von den Axen-Ebenen ZY, ZX, YX geschnitten wird; denn im gegenwärtigen, (so wie in manchem andern) Betracht ist die Ebene E_x als vierte Axen-Ebene anzusehen, so dafs ein Axen-Tetraëder statt findet, dessen 6 Kanten X, Y, Z, X_1, Y_1 und Z_1 als Axen der gegebenen Flächen, $B(F^2)$, zu betrachten sind.

Berlin, im April 1854.

19.

Über den Unterschied zwischen theoretischen und practischen Zinsrechnungen.

(Nachtrag zu der Abhandlung über Sparcassen im 39. Bande dieses Journals S. 183 etc.)

(Vom Herausgeber.)

1.

Es ist für das Eigenthumsrecht, also auch für die Gesetzgebung nothwendig, den Unterschied der Ergebnisse *theoretischer* und *practischer* Zinsrechnungen zu berücksichtigen. Einen solchen, nicht unbedeutenden Unterschied giebt es, wie sich zeigen wird, wirklich.

Es sind insbesondere die beiden Fragen zu untersuchen:

Erstlich. Bis zu welchem Betrage *eine bestimmte Summe* in einer gewissen Zahl von Jahren durch ihre Zinsen anwächst, und

Zweitens. Welche Summe durch eine *jährliche oder halbjährliche Zahlung* und durch ihre Zinsen in einer bestimmten Zahl von Jahren aufgehäuft wird.

Diese Fragen kommen häufig in der Wirklichkeit vor. Z. B. bei Renten-Ablösungen, Tilgung von Anleihen, Renten- und Wittwencassen etc., und überall wo ein Interusurium oder gesetzliches Disconto in Betracht kommt. Die Erörterung der Ergebnisse wird sich leicht auch auf etwanige andere Fragen anwenden lassen.

2.

Man kann, aus diesem oder jenem Grunde, entweder blofs *einfache* Zinsen, wie *Hoffmann* und Andere, oder auch noch *Zinseszinsen,* wie z. B. *Leibnitz,* in Rechnung bringen. In beiden Fällen ist die *theoretische* Beantwortung der obigen beiden Fragen sehr leicht. Aber die Ergebnisse treffen in *beiden* Fällen *practisch* nicht das Rechte, und die Abweichung vom Richtigen kann, besonders bei *kleinen* Summen, *verhältnifsmäfsig* sehr bedeutend sein. Man setzt nämlich voraus, dafs sich *jede,* auch die kleinste Summe, jeden Augenblick und ohne Schwierigkeit und Mühe zinsbar sicher anlegen lasse; was bekanntlich in der Wirklichkeit *nicht* der Fall ist. Für *gröfsere* Summen ist der Unterschied der theoretischen und praktischen

Ergebnisse *verhältnifsmäfsig* wenig bedeutend, wie es sich an einigen Beispielen zeigen wird. Aber gerade *besonders* für *kleine* Summen ist es nöthig, dafs das Gesetz den Besitzer vor Schaden wahre, weil für Den, welcher Wenig hat, auch schon Wenig Viel sein kann.

3.

Als *Zinsfufs* wird gewöhnlich der *Jahreszins* angegeben und angenommen. Aber *gezahlt* werden Zinsen fast durchweg *halbjährlich;* besonders bei allen zinstragenden *Papieren.* Man wird daher in der Regel *halbjährliche Zinsen* in Rechnung zu bringen haben.

s sei eine bestimmte Zahl von Geld-Einheiten.

n eine Zahl von halben Jahren.

z sei der halbjährliche Zins von 1.

X sei die Summe, welche durch Hinzuthun *einfacher* Zinsen und

x die natürlich kleinere Summe, welche durch Hinzuthun von *einfachen* und von *Zinseszinsen* in n halben Jahren zu der Summe s unter der Bedingung anwächst, dafs sich jede, auch die kleinste Summe, in jedem Augenblick zu dem Zinsfufs z anlegen läfst.

Y sei eine halbjährliche gleiche Zahlung, welche durch Hinzuthun *einfacher* Zinsen und

y die, natürlich kleinere halbjährliche Zahlung, welche durch Hinzuthun von *einfachen* und *Zinseszinsen* in n halben Jahre die Summe s giebt; beides unter der obigen Bedingung.

a sei die *kleinste* Summe, welche sich *wirklich* stets ohne Mühe und Schwierigkeit zu dem Zinsfufs z sicher anlegen läfst.

X_n und Y_n seien die Summen, welche sich aus X und Y durch Hinzuthun *einfacher* Zinsen und

x_n und y_n diejenigen, welche sich aus x und y durch Hinzuthun von *einfachen* und von *Zinseszinsen* in n halben Jahren *wirklich* aufhäufen lassen; nämlich unter der Bedingung, dafs nur *Vielfache von a* auf Zinsen ausgethan werden können.

σ sei die *Summe* und

ε die *halbjährliche Zahlung,* welche in n halben Jahren durch Hinzuthun von *wirklich* zu erlangenden Zinsen *näherungsweise* die Summe s einträgt.

σ_n und ε_n seien die Summen, bis zu welchen σ und ε in n halben Jahren durch Hinzuthun von ***wirklich*** zu erlangenden Zinsen anwachsen, so dafs, wenn σ und ε genau berechnet werden, σ_n und ε_n ***gleich*** s sind.

4.

Erstlich. Eine bestimmte Summe wächst durch Zinsen, theoretisch, wie folgt an.

I. Die Summe X durch einfache Zinsen.

Da jedes halbe Jahr zX zu X hinzukommt, so nimmt X in n halben Jahren um nzX und folglich bis zu $X+nzX$ zu. Soll also Dies die Summe s geben, so mufs

$$(1.) \quad s = (1+nz)X \text{ sein, woraus}$$

$$(2.) \quad X = \frac{s}{1+nz} \text{ folgt; desgleichen}$$

$$(3.) \quad n = \frac{s-X}{zX} \text{ und}$$

$$(4.) \quad z = \frac{s-X}{nX}.$$

II. Die Summe x durch Zinseszinsen.

Da der Ertrag jedes halben Jahres $1+z$ mal so grofs wird, so ist der Ertrag von x nach n halben Jahren $x(1+z)^n$. Soll Dies die Summe s geben, so mufs

$$(5.) \quad s = x(1+z)^n \text{ sein, woraus}$$

$$(6.) \quad x = \frac{s}{(1+z)^n} \text{ folgt; desgleichen}$$

$$(7.) \quad n = \frac{\log s - \log x}{\log(1+z)} \text{ und}$$

$$(8.) \quad \log(1+z) = \frac{\log s - \log x}{n}.$$

Zweitens. Eine gleiche halbjährliche Zahlung trägt theoretisch Folgendes ein.

I. Die halbjährliche Zahlung Y durch einfache Zinsen.

Es werde angenommen, dafs, wie es gewöhnlich der Fall ist, die ***erste*** halbjährliche Zahlung am ***Ende*** des ersten, die ***letzte*** halbjährliche Zahlung am ***Ende*** des letzten halben Jahres erfolge.

Dann ist die *erste* halbjährliche Zahlung Y, welche am Ende des ersten halben Jahres erfolgte, bis zum letzten halben Jahre, die $n-1$ halben Jahre hindurch, nach (1.), bis zu $[1+(n-1)z]Y$ angewachsen; die *zweite* halbjährliche Zahlung Y, die $n-2$ halben Jahre hindurch, bis zu $[1+(n-2)z]Y$; die *dritte* halbjährliche Zahlung Y, die $n-3$ halben Jahre hindurch, bis zu $[1+(n-3)z]Y$ u. s. w. Die *letzte* halbjährliche Zahlung giebt blofs Y. Also ist überhaupt aufgesammelt worden:

$$(1+2+3+4\cdots+n-1)zY+nY = nY+\tfrac{1}{2}(1+n-1)(n-1)zY$$
$$= nY[1+\tfrac{1}{2}(n-1)z].$$

Soll Dies die Summe s geben, so mufs

$$(9.) \qquad s = nY[1+\tfrac{1}{2}(n-1)z]$$

sein, und daraus folgt

$$(10.) \qquad Y = \frac{s}{n[1+\frac{1}{2}(n-1)z]}.$$

Ferner folgt aus (9.) $s=\frac{1}{2}n^2zY-\frac{1}{2}nzY+nY$ oder $n^2-2n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z}\right)-\frac{2s}{zY}=0$, also $n=\frac{z-2}{2z}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{z-2}{2z}\right)^2+\frac{2s}{zY}\right]}$ oder

$$(11.) \qquad n = \frac{z-2\pm\sqrt{\left[(z-2)^2+\frac{8s}{Y}\right]}}{2z}.$$

Endlich folgt aus (9.)

$$(12.) \qquad z = \frac{2(s-nY)}{n(n-1)Y}.$$

II. Die halbjährliche gleiche Zahlung Y durch Zinseszinsen.

Die *erste* halbjährliche Zahlung y, welche am Ende des ersten halben Jahres erfolgt, wächst bis zum Ende des $n$ten halben Jahres, die $n-1$ halben Jahre hindurch, nach (5.) bis zu $y(1+z)^{n-1}$ an; die *zweite* halbjährliche Zahlung y, die $n-2$ halben Jahre hindurch, bis zu $y(1+z)^{n-2}$; die dritte halbjährliche Zahlung, die $n-3$ halben Jahre hindurch, bis zu $y(1+z)^{n-3}$ u. s. w. Die *letzte* halbjährliche Zahlung y thut blofs y hinzu. Also ist überhaupt aufgesammelt worden: $[1+(1+z)+(1+z)^2+(1+z)^3\cdots+(1+z)^{n-1}]y=\frac{(1+z)^n-1}{1+z-1}\cdot y$ $=\frac{(1+z)^n-1}{z}\cdot y$. Soll Dies die Summe s geben, so mufs

$$(13.) \qquad s = \frac{(1+z)^n-1}{z}\cdot y$$

sein. Hieraus folgt

$$(14.) \quad y = \frac{zs}{(1+z)^n - 1};$$

desgleichen $sz + y = (1+z)^n y$, also $n \log(1+z) = \log\left(1 + \frac{zs}{y}\right)$ und

$$(15.) \quad n = \frac{\log(zs+y) - \log y}{\log(1+z)};$$

endlich

$$(16.) \quad \log(1+z) = \frac{\log(zs+y) - \log y}{n}.$$

Aus der Gleichung (16.) läfst sich z nur näherungsweise durch Versuche finden, wie es auch sonst häufig, z. B. bei der Auflösung algebraischer Gleichungen von höheren Graden vorkommt. Man kann für z zunächst den Werth von z, welchen (12.) für *einfache* Zinsen und für $Y = y$ giebt und welcher etwas *zu grofs* sein wird, rechts in (16.) setzen. Dann verkleinert man ihn allmälig, bis der Gleichung (16.) genug gethan wird. Die übrigen obigen Gleichungen lassen sich unmittelbar auflösen.

Man möge nun an ein Paar bestimmten Fällen sehen, inwiefern die Ergebnisse der theoretischen Ausdrücke von denen in der *Wirklichkeit* abweichen.

5.

Frage No. 1. *A* hat die *Nutzniefsung* einer Summe s, welche dem *B* gehört, auf n halbe Jahre. Wieviel kann und mufs *B* dem *A* am *Anfange* der n halben Jahre zahlen, wenn er dem *A* die Nutzniefsung abkaufen will?

a. Offenbar so viel, dafs *B* aus der Summe, welche er von s *übrig behält*, in n halben Jahren die ihm dann gebührende Summe s aufhäufen kann. Die *geringeren immerwährenden* Zinsen aus dem *Theile* von s, welchen *A* erhält, sind *so viel werth* als die *vollen* Zinsen von s auf n *halbe Jahre.*

b. Der jährliche Zinsfufs sei 4 *vom Hundert*, also

$$(17.) \quad z = 0{,}02.$$

Ferner habe *A* die Nutzniefsung der Summe s auf 20 Jahre, so dafs

$$(18.) \quad n = 40$$

ist. Und dann sei zunächst die Summe

$$(19.) \quad s = 100 \text{ Thaler.}$$

c. Bringt man dem ***B*** blofs *einfache* Zinsen in Rechnung, so ist Das, was er von den 100 Thalern *übrig behalten* mufs, nach (2.) *theoretisch:*

$$(20.) \quad X = \frac{s}{1+nz} = \frac{100}{1+40.0{,}02} = \frac{100}{1{,}8} = 55{,}555 \text{ Thaler,}$$

und er hat also 44,444 Thaler dem ***A*** zu zahlen.

Bringt man dem ***B Zinseszinsen*** in Rechnung, so ist Das, was er von den 100 Thalern *übrig behalten* mufs, nach (6.):

$$(21.) \quad x = \frac{s}{(1+z)^n} = \frac{100}{1{,}02^{40}} = 45{,}289 \text{ Thlr. (durch Logarithmen berechnet),}$$

und er hat also dem ***A***, 54,711 Thaler zu zahlen.

d. Sicherlich würde nun ***B*** am Ende des 20ten Jahres zu seinen 100 Thalern gelangen, wenn er halbjährlich 2 v. H. *einfache* Zinsen zu der Summe $X = 55{,}555$ Thaler, oder 2 v. H. Zinsen und Zinseszinsen zu der Summe $x = 45{,}289$ Thaler, die er übrig behält, hinzu legen *könnte.* Aber es ist nicht vorauszusetzen, dafs ***B*** sogleich Jemand finden werde, der gerade 55,555 Thaler zu 4 v. H. jährlich zu leihen verlangt. Er wird ihn *suchen* müssen, und dieses *Suchen* erfordert, wenn nicht baare Kosten, so doch Zeit und Mühe; und Zeit und Mühe sind auch Geld. Findet er nur zu einer geringeren runden Summe, z. B. zu 50 Thalern, einen Schuldner, so verliert er schon die Zinsen von dem Rest. Es ist möglich, dafs ihm Dies durch die Zinseszinsen, welche er erlangen kann, wieder einkommt; allein es ist nicht sicher.

Entschieden ist sein Schaden, wenn er nur 45,289 Thaler übrig behält, und nun Zins vom Zins aufhäufen soll. Denn er mufs dann nicht blofs gleich Anfangs einen Schuldner suchen, welcher gerade 45,289 Thaler geliehen verlangt, sondern auch jedes halbe Jahr Schuldner für die geringeren Zinsbeträge (z. B. von $0{,}02.45{,}289 = 0{,}90578$ Thaler nach dem ersten halben Jahr); was ihm schwerlich gelingen wird. Findet er nur für *weniger* Schuldner, so verliert er von den Zinsen; und finden sich nur Solche, die *mehr* verlangen, so mufs er von dem Seinigen zulegen; wozu er nicht verbunden ist.

e. Alles was ***B*** zu thun *vermag,* ist, dafs er für so viel *als es angeht* aus den x oder X Thalern, die er übrig behielt, so wie späterhin aus den aufgesammelten Zinsen, sichere zinstragende und ohne namhafte Mühe zu erlangende Papiere kauft, das Übrige aber, was noch nicht zu den *kleinsten* käuflichen Papieren hinreicht, zinslos zu seinem Bestande hinzuthut.

f. Es wäre also zu berechnen, welche Summe ***B*** aus den Summen X und x die 40 halben Jahre hindurch in den beiden Fällen, wenn ihm nur

einfache Zinsen und wenn ihm ***Zinseszinsen*** in Anrechnung gebracht werden, ***wirklich*** aufzuhäufen vermag.

Es werde angenommen, dafs, wie es in der Wirklichkeit meistens der Fall sein wird, das ***kleinste,*** überall käufliche sichere Zinspapier, welches 2 v. H. halbjährliche Zinsen trägt, auf

(22.) $a = 10$ Thaler

laute.

g. Dann sind die Bestände, zu welchen ***B*** allmälig gelangt, folgende.

Wenn dem B blofs einfache Zinsen in Rechnung gebracht werden, also von $X = 55{,}555$ Thlrn.

(23.)

Am Ende des halben Jahres.	Bestand.	Nämlich von früher.	Und an Zins.	Von	Aus
Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	
5	60,555	55,555	5,0	50	5 halben Jahren,
13	70,155	60,555	9,6	60	8 – –
21	81,355	70,155	11,2	70	8 – –
27	90,955	81,355	9,6	80	6 – –
33	101,755	90,955	10,8	90	6 – –
38	111,755	101,755	10,0	100	5 – –
48	116,155	111,755	4,4	110	2 – –

Also kann ***B*** bis zum Ende des 20ten Jahres aus $X = 55{,}555$ Thlrn. die Summe

(24.) $X_n = 116{,}155$ Thaler

wirklich aufhäufen; was über 16 v. H. ***mehr*** ist, als ihm zukommt. Folglich wird ***B,*** wenn man ihm ***blofs einfache*** Zinsen in Ansatz bringt, ***bedeutend begünstigt*** und ***A*** gegenseits durch die Zahlung von blofs 44,444 Thlrn. ***benachtheiligt.***

Wenn dem B Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden, also von $x = 45{,}289$ Thlrn.

(24_a.)

Am Ende des halben Jahres.	Bestand.	Nämlich von früher.	Und an Zins.	Von	Aus
Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	
6	50,089	45,289	4,8	40	6 halben Jahren,
16	60,089	50,089	10,0	50	10 – –
25	70,889	60,089	10,8	60	9 – –
32	80,689	70,889	9,8	70	7 – –
38	90,289	80,689	9,6	80	6 – –
40	93,889	90,289	3,6	90	2 – –

Also vermag B bis zum Ende des 20ten Jahres aus $x = 45{,}289$ Thalern nur die Summe

$$(25.) \qquad x_n = 93{,}889 \text{ Thaler}$$

aufzuhäufen, was über 6 v. H. ***weniger*** ist, als ihm zukommt. Folglich wird B, wenn man ihm ***Zinseszinsen*** in Ansatz bringt, ***bedeutend benachtheiligt*** und dagegen A gegenseits durch die Zahlung von 54,711 Thlrn. ***begünstigt.***

Mithin trifft weder die Anrechnung von blofs ***einfachen*** Zinsen, noch die von Zinseszinsen das Rechte.

h. Bei gröfseren Summen ist der Fehler bei der Anrechnung von ***Zinseszinsen*** verhältnifsmäfsig nur gering, bei der Anrechnung von blofs *einfachen* Zinsen aber noch viel gröfser.

Es sei z. B. s, statt wie vorhin 100 Thaler,

$$(26.) \qquad s = 10000 \text{ Thaler.}$$

Dann sind X und x in (2. und 6.) 100 mal so grofs und folglich ist

$$(27.) \qquad X = 5555{,}5 \text{ Thaler für blofs einfache Zinsen,}$$

$$(28.) \qquad x = 4528{,}9 \text{ Thaler für die Anrechnung von Zinseszinsen.}$$

Wir wollen von der Rechnung, zunächst für ***einfache*** Zinsen, um den Raum zu sparen, blofs den Anfang hersetzen.

Wenn dem B blofs einfache Zinsen in Ansatz gebracht, also 5555,5 Thlr. zugestanden werden, so sind die Beträge folgende:

(29.)

Am Ende des halben Jahres.	Bestand.	Nämlich vom vorigen Jahre.	Und an Zins.	Von
1 Thlr.	5666,5 Thlr.	5555,5 Thlr.	111 Thlr.	5550 Thlr.
2 –	5779,7 –	5666,5 –	112,2 –	5660 –
3 –	5895,1 –	5779,7 –	115,4 –	5770 –
4 –	6012,9 –	5895,1 –	117,8 –	5890 –
5 –	6133,1 –	6012,9 –	120,2 –	6010 –
. . . . .				

Das End-Ergebnifs ist

$$(30.) \qquad X_n = 12260{,}3 \text{ Thlr.}$$

Also kann B aus den ihm zu *einfachen* Zinsen berechneten 5555,5 Thlrn. in 20 Jahren nicht blofs 10000 Thlr., sondern 12260,3 Thlr. aufhäufen; er bekommt also über $22\frac{1}{2}$ v. H. ***mehr,*** als ihm gebührt.

Werden dagegen dem B Zinseszinsen in Anrechnung gebracht,

so ergiebt eine ganz ähnliche Rechnung, dafs er von den ihm alsdann zugestandenen 4528,9 Thlrn. in 20 Jahren nicht 10000 Thlr., sondern nur

$$(31.) \qquad x_n = 9993{,}3 \text{ Thlr.}$$

aufzuhäufen vermag, dafs er mithin 6,7 Thlr. ***zu wenig*** bekommt; was nicht bedeutend ist.

6.

Frage No. 2. ***A*** hat dem ***B*** eine ***immerwährende Rente*** zu zahlen, welche halbjährlich 2 v. H. der Summe s beträgt. Wieviel mufs ***A*** zu der Rente n halbe Jahre lang ***halbjährlich zulegen,*** um sie abzulösen:

Oder auch:

A ist dem ***B*** die Summe s schuldig, mufs sie ihm mit 2 v. H. halbjährlich verzinsen und zuletzt, wenn auch nach noch so langer Zeit, zurückzahlen. Wieviel mufs ***A*** n halbe Jahre lang halbjährlich zu den Zinsen ***zulegen,*** um dann nach n halben Jahren ***nichts*** zurückzahlen zu dürfen?

a. Offenbar so viel, dafs ***B*** aus der ***Zulage*** in n halben Jahren die Summe s aufzuhäufen vermag, weil er dann weiterhin, statt von dem ***A,*** aus der Summe s die ihm gebührende Rente, oder die ihm gebührenden vollen Zinsen zieht.

b. Die nöthige ***halbjährliche Zulage*** wird, wenn man dem ***B*** nur ***einfache*** Zinsen in Ansatz bringt, die Y (10.), und wenn man ihm ***Zinseszinsen*** anrechnet, die y (14.) sein.

c. Es sei nun zuerst

$$(32.) \qquad s = 100 \text{ Thaler}, \quad n = 40,$$

so ergiebt sich aus (10.) und aus (14.):

$$(33.) \qquad Y = \frac{s}{n[1+\frac{1}{2}(n-1)z]} = \frac{100}{40(1+19{,}5.0{,}02)} = \frac{100}{55{,}6}$$

$$= 1{,}7985 \text{ Thlr. für } \textit{einfache} \text{ Zinsen und}$$

$$(34.) \qquad y = \frac{zs}{(1+z)^n - 1} = \frac{0{,}02.100}{1{,}02^{40} - 1} = 1{,}6555 \text{ Thlr. für } \textbf{\textit{Zinseszinsen}}.$$

d. Es kommt jetzt wieder darauf an, welche Summe ***B*** aus diesen halbjährlichen Zahlungen in 20 Jahren aufzuhäufen vermag; wobei wie in (§. 5. 22.)

$$(35.) \qquad a = 10 \text{ Thaler}$$

angenommen werden soll.

e. Die Beträge sind folgende:

Wenn dem B blofs einfache Zinsen in Rechnung gebracht werden, also aus der halbjährlichen Zahlung von 1,7985 Thlr. (33.):

(36.)

Am Ende des halben Jahres.	Bestand.	Nämlich von früher.	Und dazu an halbjährlichem Zins.	Von	Und an halbjährlicher Zahlung.	Aus		
Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.			
6	10,7710	0	0	0	1,7985	6	halben	Jahren.
11	20,7635	10,7710	0,2	10	1,7985	5	–	–
16	31,7560	20,7635	0,4	20	1,7985	5	–	–
20	41,3500	31,7560	0,6	30	1,7985	4	–	–
24	51,7400	41,3500	0,8	40	1,7985	4	–	–
27	60,1355	51,7400	1,0	50	1,7985	3	–	–
31	72,1295	60,1355	1,2	60	1,7985	4	–	–
34	81,7250	72,1295	1,4	70	1,7985	3	–	–
37	91,9210	81,7250	1,6	80	1,7985	3	–	–
40	102,7165	91,9210	1,8	90	1,7985	3	–	–

Also vermag ***B*** bis zum Ende des 20ten Jahres aus der halbjährlichen Zahlung von 1,7985 Thlrn. die Summe

$$(37.) \qquad Y_n = 102{,}7165 \text{ Thlr.}$$

aufzuhäufen, mithin nahe an 3 v. H. *mehr,* als ihm zukommt. Er wird daher durch die Anrechnung von *blofs einfachen* Zinsen *begünstigt.*

Wenn dem B Zinseszinsen in Rechnung gebracht werden; also aus der halbjährlichen Zahlung von 1,6555 Thlr. (34.):

(38.)

Am Ende des halben Jahres.	Bestand.	Nämlich von früher.	Und dazu an halbjährlichem Zins.	Von	Und an halbjährlicher Zahlung.	Aus		
Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.	Thlr.			
7	11,5885	0	0	0	1,6555	7	halben	Jahren,
12	20,8660	11,5885	0,2	10	1,6555	5	–	–
17	31,1435	20,8660	0,4	20	1,6555	5	–	–
21	40,1655	31,1435	0,6	30	1,6555	4	–	–
26	52,4430	40,1655	0,8	40	1,6555	5	–	–
29	60,4095	52,4430	1,0	50	1,6555	3	–	–
33	71,8315	60,4095	1,2	60	1,6555	4	–	–
36	80,9980	71,8315	1,4	70	1,6555	3	–	–
39	90,7645	80,9980	1,6	80	1,6555	3	–	–
40	94,2200	90,7645	1,8	90	1,6555	1	–	–

Also vermag B bis zum Ende des 20ten Jahres aus der halbjährlichen Zahlung von 1,6555 Thlrn. nur die Summe

$$(39.) \quad y_n = 94{,}2200 \text{ Thlr.}$$

anzuhäufen, folglich um beinahe 6 v. H. *weniger* als ihm zukommt.

f. Für *gröfsere* Summen sind die Abweichungen, wenn man blofs einfache Zinsen in Anrechnung bringt, ebenfalls bedeutend, aber wenn man Zinseszinsen ansetzt, nur gering.

Es sei z. B.

$$(40.) \quad s = 10000 \text{ Thlr.},$$

so ist nach (10. u. 14.), wie aus (33. u. 34.) erhellet,

$$(41.) \quad Y = 179{,}85 \text{ Thaler für } \textit{einfache} \text{ Zinsen, und}$$

$$(42.) \quad y = 165{,}55 \text{ Thaler für } \textit{Zinseszinsen}.$$

g. Die Berechnung ist der obigen ganz ähnlich, weshalb sie, um den Raum zu sparen nicht hergesetzt wird. Die Ergebnisse sind:

$$(43.) \quad Y_n = 10857{,}50 \text{ Thaler},$$

$$(44.) \quad y_n = 9994{,}80 \text{ Thaler}.$$

Mithin bekommt B, wenn man ihm blofs *einfache* Zinsen anrechnet, durch die halbjährliche Zahlung von 179,85 Thlrn. nach 20 Jahren 857,50 Thlr. oder über $8\frac{1}{2}$ v. H. *zu viel;* wenn man ihm dagegen *Zinseszinsen* in Ansatz bringt nur 5,2 Thlr. *zu wenig;* was nicht bedeutend ist.

7.

Lautet das *kleinste* käufliche Zinspapier auf mehr als 10 Thlr., was leicht sein kann, da die kleinen Stücke nicht so leicht und nicht jederzeit zu haben sind, so ist der Unterschied für kleine Summen verhältnifsmäfsig *sehr* bedeutend.

Ist man z. B. auf Eisenbahnprioritäts-Actien beschränkt, die gewöhnlich auf

$$(45.) \quad a = 100 \text{ Thlr.}$$

lauten, so würden Dem, welcher in 20 Jahren 100 Thlr. aufhäufen soll, *am Anfange der 20 Jahre* weder die ihm für den Ansatz von blofs einfachen Zinsen berechneten $X = 55{,}555$ (20.), und noch weniger die ihm für Zinseszinsen berechneten $x = 45{,}289$ Thlr. (21.) genügen. Er würde, sobald er im Geringsten weniger als 100 Thlr. empfängt, streng genommen, *gar nichts* an Zinsen aufsammeln können. Da er aber wieder, wenn man ihm die *vollen* 100 Thlr.

gäbe, ***zu viel*** bekommen würde, nämlich die 80 Thlr. Zinsen von 100 Thlrn. in 20 Jahren, so ist in diesem Fall die Auseinandersetzung nicht anders *möglich,* als dafs man ihm blofs *einfache* Zinsen anrechnet, also 55,555 Thlr. zahlt und nun *voraussetzt,* er werde Jemand finden der diese Summe zu 4 v. H. geliehen verlangt. Hier *mufs* also nothwendig nach *einfachen* Zinsen gerechnet werden. Auch weder die halbjährliche Zahlung von 1,7985 Thlr. für *einfache,* noch die von 1,6555 Thlr. für Zinseszinsen berechnet, genügt, weil sich *nichts* davon auf Zinsen anlegen läfst. Es müssen halbjährlich $2\frac{1}{2}$ Thlr. gezahlt werden, woraus sich dann in 40 halben Jahren die 100 Thlr. aufsammeln lassen.

Für grofse Summen ist es anders. Z. B. aus der für $s = 10000$ Thlr auf Zinseszinsen berechneten Summe von 45238,9 Thlrn. (28.) lassen sich in 20 Jahren, selbst wenn $a = 10$ Thlr. ist, auf die obige Weise berechnet, 9946 Thlr. aufhäufen, und aus der auf Zinseszinsen berechneten halbjährlichen Zahlung von 165,55 Thlr. (42.) noch immer 9952 Thlr., so dafs in dem einem und dem andern Falle nur etwa $\frac{1}{2}$ v. H. an der richtigen Summe fehlt.

8.

Es würde sich fragen, wie die ***Summe*** σ (§. 3.), aus welcher, und die ***halbjährliche Zahlung,*** durch welche sich in n halben Jahren die bestimmte Summe s für bestimmte a und z durch Hinzuthun der ***wirklich*** zu erlangenden Zinsen aufhäufen läfst, zu finden sei.

Die Summe σ

läfst sich ***ohne Proben,*** und im Allgemeinen genau, in gewissen Ausnahmsfällen aber für ein nahe kommendes s, wie folgt berechnen.

a. Es sollen

(46.) σ_n, σ_{n-1}, σ_{n-2}, σ_{n-3}, ... die Beträge bezeichnen, welche am Ende des $n$ten, $n-1$ten, $n-2$ten, $n-3$ten, etc. halben Jahres aus der gesuchten Summe σ durch ***wirklich*** zu erlangen gewesene Zinseszinsen sich haben aufhäufen lassen; so dafs σ_n die Summe s selbst sein soll.

(47.) k_{n-1}, k_{n+2}, k_{n+3}, ... sollen die ***gröfsten ganzen Zahlen*** der in σ_{n-1}, σ_{n-2}, σ_{n-3}, ... enthaltenen Vielfachen des kleinsten Betrages a sein, welcher sich zinsbar anlegen läfst.

(48.) r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, ... sollen die ***Reste*** sein, welche $k_{n-1}a$, $k_{n-2}a$, $k_{n-3}a$, ... von σ_{n-1}, σ_{n-2}, σ_{n-3}, ... übrig lassen, so dafs

(49.) $\sigma_{n-1} = k_{n-1}a + r_{n-1}$, $\sigma_{n-2} = k_{n-2}a + r_{n-2}$, $\sigma_{n-3} = k_{n-3}a + r_{n-3}$, ... ist.

b. Nun lassen sich aus σ_{n-1}, σ_{n-2}, σ_{n-3}, ... für das nächste halbe Jahr nur von den ***Theilen*** $k_{n-1}a$, $k_{n-2}a$, $k_{n-3}a$, ..., nicht von den Resten r_{n-1}, r_{n-2}, r_{n-3}, ..., Zinsen erlangen; denn die r sind ***kleiner*** als a und müssen also ***zinslos*** bis auf Weiteres aufbewahrt werden. Also geben die σ_{n-1}, σ_{n-2}, σ_{n-3}, ... je für das nächste halbe Jahr die Beträge

$$(50.)\quad \sigma_n = \sigma_{n-1} + zk_{n-1}a,\ \sigma_{n-1} = \sigma_{n-2} + zk_{n-2}a,\ \sigma_{n-2} = \sigma_{n-3} + zk_{n-3}a,$$
$$\sigma_{n-3} = \sigma_{n-4} + zk_{n-4}a, \ldots$$

c. Setzt man hierin die Ausdrücke von σ_{n-1}, σ_{n-2}, σ_{n-3}, ... aus (49.), so erhält man:

$$(51.)\quad \begin{cases} 1. & s = \sigma_n = k_{n-1}a(1+z) + r_{n-1}, \\ 2. & \sigma_{n-1} = k_{n-2}a(1+z) + r_{n-2}, \\ 3. & \sigma_{n-2} = k_{n-3}a(1+z) + r_{n-3}, \\ 4. & \sigma_{n-3} = k_{n-4}a(1+z) + r_{n-4}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n-1. & \sigma_2 = k_1 a(1+z) + r_1, \\ n. & \sigma_1 = k_0 a(1+z) + r_0 \end{cases}$$

und dann aus (49.)

$$(52.)\quad \begin{cases} 1. & \sigma_{n-1} = k_{n-1}a + r_{n-1}, \\ 2. & \sigma_{n-2} = k_{n-2}a + r_{n-2}, \\ 3. & \sigma_{n-3} = k_{n-3}a + r_{n-3}, \\ 4. & \sigma_{n-4} = k_{n-4}a + r_{n-4}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n-1. & \sigma_1 = k_1 a + r_1 \text{ und} \\ n. & \sigma_0 = k_0 a + r_0 = \sigma. \end{cases}$$

d. Man mufs also zuerst nach (51. 1.) $s = \sigma_n$ mit $a(1+z)$ dividiren, was k_{n-1} und r_{n-1} und darauf aus (52. 1.) σ_{n-1} giebt. Hierauf dividirt man nach (51. 2) das gefundene σ_{n-1} mit $a(1+z)$, was k_{n-2} und r_{n-2} und dann aus (52. 2.) σ_{n-2} giebt. Und so weiter bis zu $\sigma_0 = \sigma$ hinunter; welches also dann so aus s gefunden wird.

e. Offenbar findet sich durch diese Rechnung das gesuchte σ aus dem bestimmten s ***völlig genau;*** aber ***nur dann,*** wenn alle Reste r, auf welche man kommt, ***kleiner als*** a sind. Es kann aber sein, dafs man auf Reste r kommt, welche ***gleich*** a und selbst ***gröfser als*** a sind, weil die Gleichungen (51.), aus welchen man die r durch die Division, nicht mit a, sondern mit $a(1+z)$ nimmt, nur r geben, die nothwendig kleiner als $a(1+z)$,

nicht nothwendig kleiner als a sind. Ergiebt sich nun ein $r = a$ oder $> a < a(1+z)$, so läfst sich deshalb nicht etwa ein um 1 gröfseres k setzen; denn dadurch würde das $r < a(1+z)$ um $a(1+z)$ kleiner und folglich *negativ* werden; was nicht sein darf, weil es bedeuten würde, dafs zu dem Bestand für die weitere Zeit *zugelegt* werden soll; wozu der Inhaber des Bestandes nicht verbunden ist. Man mufs also die r, welche, obgleich kleiner als $a(1+z)$, gleich oder gröfser als a sind, *zulassen*, und setzen, dafs sie ebenfalls zinslos bleiben; woraus sich dann aus dem gefundenen σ rückwärts ein σ_n ergeben mufs, welches um *etwas gröfser als* s ist. Indessen ist dieser kleine Überschufs in diesen Ausnahmsfällen nicht *unbillig*. Ein Überschufs über s wäre sogar überhaupt in *allen* Fällen nicht unbillig; als einige Vergütigung für die *Mühe des Aufsammelns*.

II. *Die halbjährliche Zahlung* ε,

welche durch die *wirklich* zu erlangenden Zinsen in n halben Jahren die Summe s einträgt, läfst sich *nicht* durch ein ähnliches Verfahren wie in (I.) finden, sondern nur näherungsweise, durch Proben. Denn hier würde in den Gleichungen (50. u. 51.) rechterhand ε hinzukommen und es würde z. B. in (51.)

$$(53.) \qquad s = \sigma_n = k_{n-1}\, a(1+z) + r_{n-1} + \varepsilon$$

sein, woraus sich k_{n-1} und z_{n-1} *nicht* finden lassen, da ε noch *unbekannt* ist.

9.

In der Regel wird man, um ε, so wie auch σ zu finden, am besten thun und am schnellsten zum Ziele kommen, wenn man erst x und y nach (6. u. 14.) berechnet, da die Anrechnung von *Zinseszinsen*, wie aus dem Obigen erhellet, im Allgemeinen das Richtige näher trifft als die Anrechnung von blofs *einfachen* Zinsen. Hierauf berechne man wie oben die Summen x_n und y_n, welche sich aus den gefundenen x und y durch *wirklich* zu erlangende Zinsen aufhäufen lassen und welche stets *kleiner* sein werden als s. Dann, um dem richtigen gröfsern σ und ε näher zu kommen, vergröfsere man x und y *verhältnifsmäfsig*, indem man nämlich

$$(54.) \qquad \overset{1}{x} = x \cdot \frac{s}{x_n} \quad \text{und} \quad \overset{1}{y} = y \cdot \frac{s}{y_n}$$

setzt. Man berechne nun von Neuem die Summen $\overset{1}{x}_n$ und $\overset{1}{y}_n$, welche aus $\overset{1}{x}$ und $\overset{1}{y}$ durch *wirklich* zu erlangende Zinsen sich aufhäufen lassen. Treffen die s noch nicht so nahe, als zu verlangen ist, so wiederhole man das Ver-

fahren und setze

$$(55.) \qquad \overset{2}{x} = \overset{1}{x} \cdot \frac{s}{\overset{1}{x_n}} \quad \text{und} \quad \overset{2}{y} = \overset{1}{y} \cdot \frac{s}{\overset{1}{y_n}}.$$

U. s. w. bis das s nahe genug erreicht ist, z. B. durch $\overset{m}{x}$ und $\overset{m}{y}$. Dieses $\overset{m}{x}$ und $\overset{m}{y}$ kann alsdann

$$(56.) \qquad \overset{m}{x} = \sigma \quad \text{und} \quad \overset{m}{y} = \varepsilon$$

gesetzt werden.

Zum Beispiel für $s = 100$ Thlr., $\varkappa = 0{,}02$, $n = 40$ wäre nach (21.) $x = 45{,}289$ Thlr. und nach (25.) $x_n = 93{,}889$ Thlr. Ferner wäre nach (34.) $y = 1{,}6555$ Thlr. und nach (39.) $y_n = 94{,}2200$ Thlr. Also würde man nach (54.)

$$(57.) \qquad \overset{1}{x} = 45{,}289 \cdot \frac{100}{93{,}889} = 48{,}236,$$

$$(58.) \qquad \overset{1}{y} = 1{,}6555 \cdot \frac{100}{94{,}2200} = 1{,}7565$$

zu setzen haben. Berechnet man nun hieraus wie in (24. und 38.) $\overset{1}{x_n}$ und $\overset{1}{y_n}$, so ergiebt sich dafür

$$(59.) \qquad \overset{1}{x_n} = 100{,}236 \quad \text{und} \quad \overset{1}{y_n} = 100{,}86.$$

Dies Beides kommt $s = 100$ schon hinreichend nahe, und es wird daher, ganz angemessen, weil $\overset{1}{x_n}$ und $\overset{1}{y_n}$ etwas *gröfser* als s sind,

$$(60.) \qquad \sigma = \overset{1}{x} = 48{,}236 \text{ Thlr.} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \overset{1}{y_n} = 1{,}7565 \text{ Thlr.}$$

gesetzt werden können.

Für gröfsere Summen z. B.: $s = 10000$ Thlr., wo nach (31.) $x_n = 9993{,}3$ Thaler und nach (44.) $y_n = 9994{,}8$ Thlr., also schon dem s ziemlich nahe sich ergeben haben, ist die Annäherung nach (§. 4.) noch passender.

10.

Es zeigt sich nun aus allem Obigen thatsächlich, dafs weder die Anrechnung von *einfachen* Zinsen, noch die von *Zinseszinsen* Das giebt, was durch die Aufsammlung von Zinsen in der *Wirklichkeit* zu erlangen möglich ist. Blofs *einfache* Zinsen gerechnet, giebt für den Aufsammler in der Regel *zu viel, Zinseszinsen* geben *zu wenig*. Für *kleine* Summen s ist die Abweichung *verhältnifsmäfsig bedeutend;* je gröfser s, je geringer ist sie.

Daraus folgt dann, dafs das *Gesetz* für dergleichen Zinsrechnungen weder den Ansatz von blofs *einfachen* Zinsen, noch den Ansatz von *Zinseszinsen* vorschreiben darf. Durch die Vorschrift der Anrechnung von blofs *einfachen* Zinsen wird es den Aufsammler *begünstigen*, durch die des Ansatzes von *reinen Zinseszinsen benachtheiligen*. Das Gesetz mufs, damit es gerecht sei, vorschreiben:

> *Dafs bei dergleichen Zinsrechnungen nur diejenigen Zinsen und Zinseszinsen in Ansatz gebracht werden dürfen, welche sich wirklich erlangen lassen. Zu dem Ende mufs es die kleinsten runden Summen bestimmen, welche sich stets und ohne namhafte Mühe für den Aufsammler zu diesem oder jenem Zinsfufs sicher zinsbar anlegen lassen.*

Und danach mufs dann, wie oben auseinandergesetzt, gerechnet werden.

11.

Andererseits folgt aus dem Umstande, dafs, wie sich oben zeigte, Das, was sich *wirklich* erlangen läfst, von dem nach reinen Zinseszinsen Berechneten für *grofse* Summen verhältnifsmäfsig nur unbedeutend abweicht, dafs eine *Sparcasse*, wie die in (Band 39. S. 183) beschriebene, die mit Hunderttausenden und Millionen von Thalern zu verkehren haben würde, unbedenklich nach *reinen Zinseszinsen* rechnen darf; wie es auch dort geschehen ist. Der kleine Verlust wird durch den möglichen Gewinn beim Ankauf der Papiere vielfach gedeckt. Was aber eine *Casse* mit der grofsen Summe vieler vereinigten Summen zu thun vermag, das vermag nicht der *Einzelne;* am wenigsten mit einer *kleinen* Summe.

Ferner folgt, dafs, wenn eine Sparcasse wie die gemeinte vorhanden wäre, dadurch auch alle Schwierigkeiten und mögliche Streitigkeiten bei den Zinsrechnungen vermieden werden würden. Denn wenn z. B. Jemand die Summe *s nach n halben Jahren* zu empfangen hätte, so könnte er, wenn er Dasjenige *sogleich* verlangt, woraus er in *n* halben Jahren die Summe *s* durch die Zinsen aufzuhäufen vermögen würde, ohne Weiteres durch diejenige Summe in *Sparcassenscheinen* befriedigt werden, die nach *n* halben Jahren die Summe *s werth ist;* und das um so mehr, da ihm dann zugleich alle Mühe und Wagnifs beim Aufsammeln erspart wird. Die Sparcasse übernimmt diese Mühe und dieses Wagnifs für ihn. Das *Gesetz* könnte ihn sogar geradezu

auf die Sparcasse verweisen; etwa ***neben*** der obigen Bestimmung. Daraus folgt ebenfalls noch ein Nutzen der vorgeschlagenen Sparcasse.

Diese Bemerkung ist der in der Überschrift gedachte *Nachtrag,* welcher noch zu der genannten Abhandlung über Sparcassen nothwendig war.

12.

Es möge noch einer Art von Zinsrechnung gedacht werden, welche zwar in der Wirklichkeit nicht vorkommt, aber theoretisch nicht ohne Interesse ist.

a. Es ist hier oben überall angenommen worden, dafs die Zinsen ***halbjährlich*** gezahlt werden. Aber es sind auch Zinsen möglich, die ***vierteljährlich, monatlich, wöchentlich, täglich*** und in beliebig noch kleineren Theilen des Jahres zahlbar sind. Geht man bis zur Theilung des Jahres in ***unendlich viele*** Theile, so würde dies Zinsen geben, die sich ***stetig (continuirlich)*** nennen lassen, und es früge sich, welches der ***Ertrag*** solcher Zinsen sein würde.

b. Theilt man das halbe Jahr und auch den halbjährlichen Zins in m Theile, so würde, wenn z wie oben den halbjährlichen Zins von 1 bezeichnet, in jedem Zeittheil $\frac{1}{m}$ die Summe $1,\ 1+\frac{z}{m}$ mal so grofs werden, also würde 1 in n halben Jahren bis auf

$$(61.)\qquad s_1 = \left(1+\frac{z}{m}\right)^{nm}$$

$$= 1+nm\cdot\frac{z}{m}+\frac{nm(nm-1)}{2}\cdot\frac{z^2}{m^2}+\frac{nm(nm-1)(nm-2)}{2.3}\cdot\frac{z^3}{m^3}\ \ldots\ldots$$

anwachsen. Dies giebt für $m=\infty$,

$$(62.)\qquad s_1 = 1+nz+\frac{n^2z^2}{2}+\frac{n^3z^3}{2.3}\ \ldots\ldots$$

Die Reihe rechts ist nichts anderes als e^{nz}, wo

$$(63.)\qquad e = 2{,}7182818285$$

und die Grundzahl der ***natürlichen Logarithmen*** ist. Also ist

$$(64.)\qquad s_1 = e^{nz}.$$

c. Theilt man den halbjährlichen Zins z nicht in m Theile, wie das halbe Jahr, sondern rechnet auf den Zeittheil $\frac{1}{m}$ so viel, dafs in m Zeittheilen oder in einem halben Jahre die Summe 1 gerade auf $1+z$ anwächst, so

kommt man natürlich auf die *gewöhnliche* Zinseszinsrechnung und es ist

$$(65.) \qquad s = (1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}z^3 \ldots .$$

d. Für $n = 1$ ist

$$(66.) \qquad s_1 = e^z \quad \text{und} \quad s = 1 + z.$$

Dies würde für $z = 0{,}02$,

$$(67.) \qquad s_1 = 1{,}02022 \quad \text{und} \quad s = 1{,}02$$

geben. Für $n = 40$ und $z = 0{,}02$ wären

$$(68.) \qquad s_1 = 2{,}22553 \quad \text{und} \quad s = 2{,}20805.$$

Die Unterschiede sind, wie man sieht, nicht bedeutend.

Berlin, im December 1852.

20.

Zur Theorie des Potentials.

(Von Herrn *Jul. Weingarten*, Stud. Math. zu Berlin.)

Die Theorie der Anziehung, die ein Körper, dessen Theile nach dem *Newton*schen Gesetz wirken, auf einen materiellen Punct ausübt, läfst sich bekanntlich auf die Betrachtung einer einzigen Function der Coordinaten des angezogenen Punctes zurückführen, aus der sich durch Derivation die Componenten der Gesammt-Anziehung ergeben. Diese Function wird nach *Gaufs* mit dem Namen *Potential* bezeichnet, und ist ihrer Wichtigkeit wegen Gegenstand vieler Untersuchungen geworden.

Im Folgenden wird eine merkwürdige Eigenschaft des Potentials auf einem von den bisherigen verschiedenen Wege hergeleitet werden.

Man suche zuvörderst den Werth des dreifachen bestimmten Integrals

$$\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[u(x-a)+v(y-b)+w(z-c)]}{u^2+v^2+w^2}\,du\,dv\,dw,$$

der offenbar bestimmt und endlich sein wird. Für $u=0$, $v=0$, $w=0$ ist allerdings das Element des Integrals ∞, allein dieser Umstand verschwindet durch die Einführung von Polarcoordinaten für u, v, w. Betrachtet man nämlich u, v, w als rechtwinklige Coordinaten, und zieht durch den Anfang derselben eine Linie, so dafs die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen bildet resp. $\frac{x-a}{r}$, $\frac{y-b}{r}$, $\frac{z-c}{r}$ sind, wo $r=\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}$ ist, so bildet dieselbe mit dem Radiusvector $\varrho=\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}$ einen Winkel ϑ, der durch die Gleichung

$$\cos\vartheta = \frac{u}{\varrho}\frac{(x-a)}{r}+\frac{v}{\varrho}\frac{(y-b)}{r}+\frac{w}{\varrho}\frac{(z-c)}{r}$$

bestimmt wird; also ist

$$\varrho r\cos\vartheta = u(x-a)+v(y-b)+w(z-c).$$

Nimmt man ferner diese Linie zur Axe von Polarcoordinaten an, so ist das Raum-Element gleich $\varrho^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi\,d\varrho$, wo ψ den Winkel bedeutet, welchen die durch die angenommene Axe und durch den Radiusvector ϱ gehende

Ebene, mit einer beliebigen festen Ebene bildet. Obiges Integral verwandelt sich also in

$$\iiint \cos\{r\varrho\cos\vartheta\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varrho.$$

Die Grenzen dieses Integrals sind, damit es wiederum den unendlichen Raum umfasse, 0 und π in Bezug auf ϑ, 0 und 2π in Bezug auf ψ und 0 und ∞ in Bezug auf ϱ.

Die Integration nach ψ giebt:

$$2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \cos\{r\varrho\cos\vartheta\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varrho;$$

welches sich durch Ausführung der Integration nach ϑ in

$$4\pi\int_0^{\infty}\frac{\sin\varrho r}{\varrho r}\,d\varrho = \frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\frac{\sin r\varrho}{\varrho}\,d\varrho$$

verwandelt. Nun ist $\int_0^{\infty}\frac{\sin r\varrho}{\varrho}\,d\varrho = \frac{1}{2}\pi$, folglich ergiebt sich

$$\frac{2\pi^2}{r}$$

für den Werth des gesuchten Integrals. Man hat folglich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2}\overline{\iiint}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos[u(x-a)+v(y-b)+w(z-c)]}{u^2+v^2+w^2}\,du\,dv\,dw.$$

Bezeichnen x, y, z die Coordinaten eines Elements eines nach dem *Newton*schen Gesetz anziehenden Körpers und a, b, c die Coordinaten des angezogenen Punctes, so ist bekanntlich das Potential des anziehenden Körpers in Bezug auf den angezogenen Punct:

$$V = \int\frac{dm}{\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}} = \int\frac{dm}{r},$$

wo dm das zu den Coordinaten x, y, z gehörende Massen-Element bedeutet. Die Integration erstreckt sich über die Masse des anziehenden Körpers.

Ist $f(x,y,z)$ die Dichtigkeit des anziehenden Körpers im Puncte x, y, z, so ist $dm = f(x,y,z)\,dx,\,dy,\,dz$, also

$$V = \iiint\frac{f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{r};$$

wobei sich die Integration auf das ganze Volumen des anziehenden Körpers bezieht.

Setzt man für $\frac{1}{r}$ den oben gefundenen Werth, und schreibt noch $\frac{4\pi}{(2\pi)^3}$ statt $\frac{1}{2\pi^2}$, so erhält man

$$V = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y,z)\cos[u(x-a)+v(y-b)+w(z-c)]}{u^2+v^2+w^2}\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}$$

$$= -4\pi\frac{1}{(2\pi)^3}\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\cos[u(x-a)+v(y-b)+w(z-c)]\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw.$$

Nun ist aber das Integral

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\cos[u(x-a)+v(y-b)+w(z-c)]\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw$$

die ***Fourier***sche Formel, und reducirt sich daher auf $f(a, b, c)$; und zwar, da sich die Integration auf $x\,y\,z$ über ein gewisses Volumen, nämlich über das des anziehenden Körpers erstreckt, nur für solche Werthe von a, b und c, die einen Punct ***innerhalb*** dieses Volumens bestimmen. Dagegen für Werthe von a, b und c, die einem Punct ***aufserhalb*** desselben angehören, wird das 6fache bestimmte Integral Null; wie aus der Theorie der ***Fourier***schen Formeln bekannt ist.

$f(a, b, c)$ bedeutet die Dichtigkeit im angezogenen Puncte. Bezeichnet man dieselbe durch D, so hat man:

1) Falls der angezogene Punct *im* anziehenden Körper liegt:

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2} = -4\pi D.$$

2) Falls derselbe ***aufserhalb*** des anziehenden Körpers liegt

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2} = 0.$$

Für Stetigkeits-Unterbrechungen der Function $f(x, y, z)$ würde die erstere Formel dieselben Modificationen erleiden, wie die ***Fourier***sche Formel selbst.

(Man vergl. die berühmte Abhandlung von ***Gauſs:*** Allgemeine Lehrsätze etc. in den Resultaten des magnetischen Vereins v. J. 1839.)

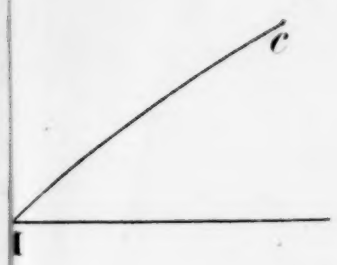
Errata.

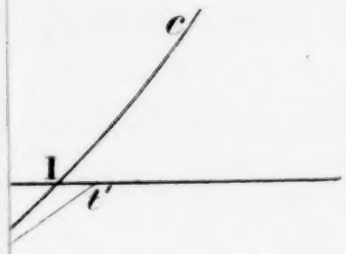
Vol. XLVII, p. 225 etc.

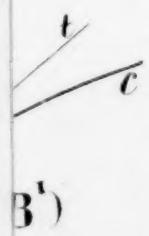
page	line	fault	correction
225	4	cyclie	cyclic
	10	z^3	z^2
	18		(insert) etc.
	23, 25	A, B, C	A', B', C'
226	28	cone	surface
227	1	set	get
228	2, 3, 4	C, C_2	c, c_2
	9	be two roots	be the two roots
	11	closet	closest
	19	tracted	traced
	23	in	is
	28	wz	nz
229	18	troughout	throughout
230	16	termes	terms
	—	quadrius	squarius
231	21	ϖ, ϖ' and ϖ	ϖ and ϖ'
	32	series	sines

Druckfehler in diesem Bande.

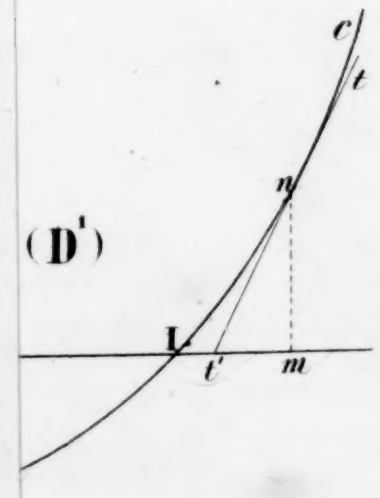
S. 6 Z. 7 v. u. statt „die Summe des Products" lies „die Summe und das Product"
— 17 — 8 v. o. st. „$A_1 A_2 \dots A \equiv A_n \dots A_2 A_1$" l. „$A_1 A_2 \dots A_n = A_n \dots A_2 A_1$"
— — — 17 u. 19. v. o. fallen die Worte „dies" und „und" weg.
— 28 — 7 v. u. statt „Das Product ... a_1, α_1, ... a_n, α_n betrachtet, deren keine zwei aufeinander folgende vereinigt liegen), ist Null, wenn ..., deren Angriffspunct x ist," lies „Das Product ... a_1, α_1, ... a_n, α_n, deren keine zwei aufeinander folgende vereinigt liegen, ist Null, wenn ..., deren Anfangspunct x ist,"
— 29 — 5 v. o. statt „in der Geraden" lies „in den Geraden"
— 33 — 15 v. o. lies „so" statt „also"
— 48 — 9 v. u. l. „und bedeutet $x\mathfrak{R}$" st. „und bedeutet $\mathfrak{R}$"
— 50 — 5 v. o. l. „In dem Producte $Y(rA_2)\alpha$ kann man" st. „In dem Producte $Y(rA_2\alpha)$ kann man"
— 50 — 13 v. o. l. „$rA_2\alpha \equiv ra_2\alpha a$" st. „$rA_2\alpha \equiv r_2\alpha a$"
— 51 — 13 v. o. l. „$A \equiv cb$" st. „$A \equiv c$"
— 54 — 8 v. u. l. „$\equiv yc$" st. „$\equiv cyc$"
— 55 — 12 v. u. l. „einen beliebigen Punct k_2" st. „einen beliebigen Punct a_2"
— — — 11 v. u. l. „eine beliebige Ebene α_2" st. „eine beliebige Ebene a_2"
— — — 10 v. u. l. „fortschreitend mit k_2" st. „fortschreitend mit a_2"
— — — 4 v. u. l. „Ihr Durchschnittspunct sei k_3," st. „Ihr Durchschnittspunct sei a_3,"
— — — 2 v. u. l. „fortschreitend mit k_3" st. „fortschreitend mit a_3"
— 56 — 9 v. o. l. „$\equiv (a_1, b_1, c_1, \partial_1) k_2\alpha_2 k_3\alpha_3 a_4\alpha$" st. „$\equiv (a_1, b_1, c_1, \partial_1) a_2\alpha_2 a_3\alpha_3 a_4\alpha$"
— — — 12 v. o. l. „zuerst durch den Punct k_2" st. „zuerst durch den Punct a_2"
— — — 13 v. o. l. „durch den Punct k_3" st. „durch den Punct a_3"
— 59 — 13 v. o. l. „gemeinsame Punct der Gleichung (1.)" st. „gemeinsame Punct (1.)"
— 60 — 6 v. o. l. „$\varphi_1 \equiv \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1$" st. „$\varphi \equiv \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1$"
— 63 — 12 v. o. l. „wurde" st. „werde"

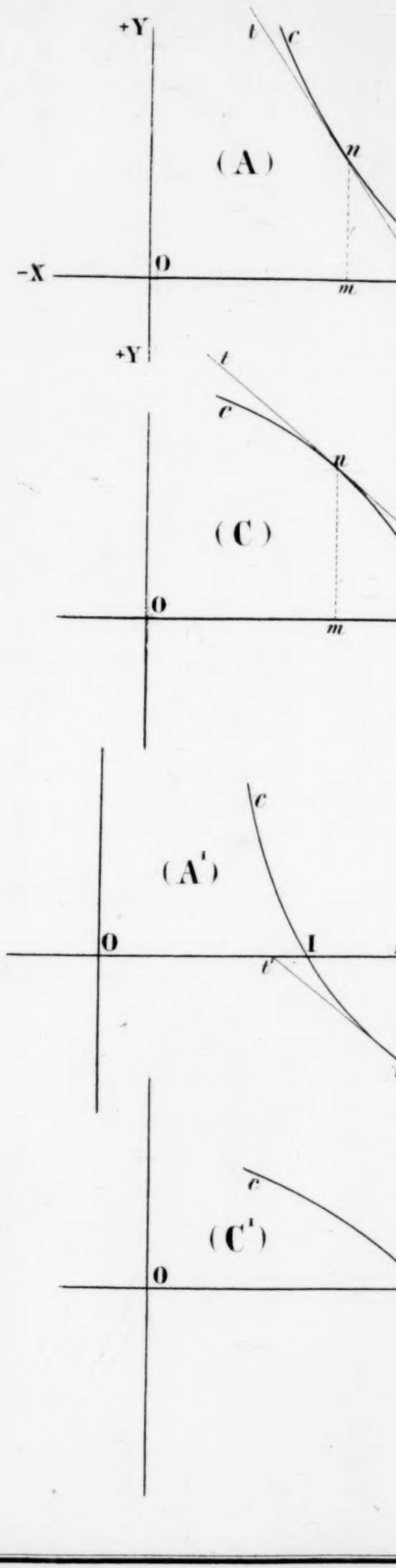




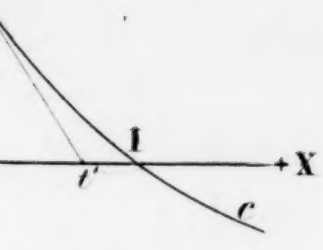


B')

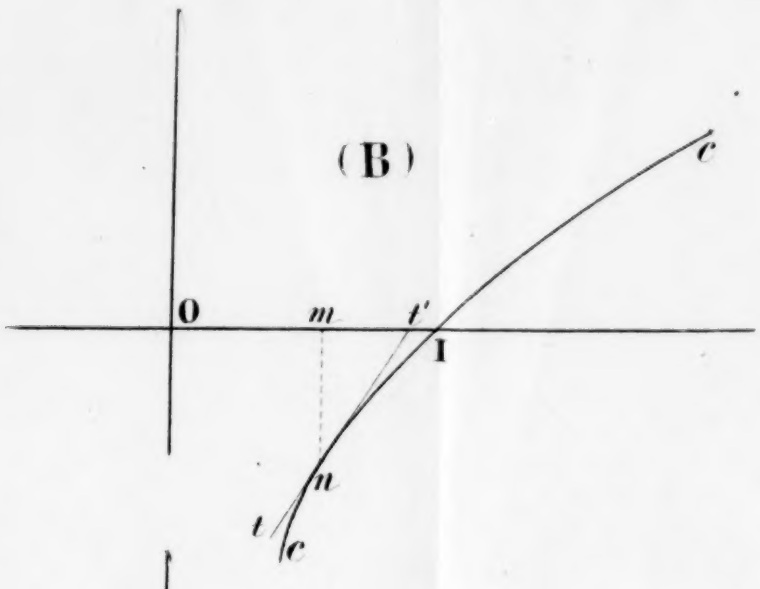



+Y
t
c
n
(A)
-X
O
m
+Y
t
c
n
(C)
O
m
c
(A')
O
1
t'
c
(C')
O

1

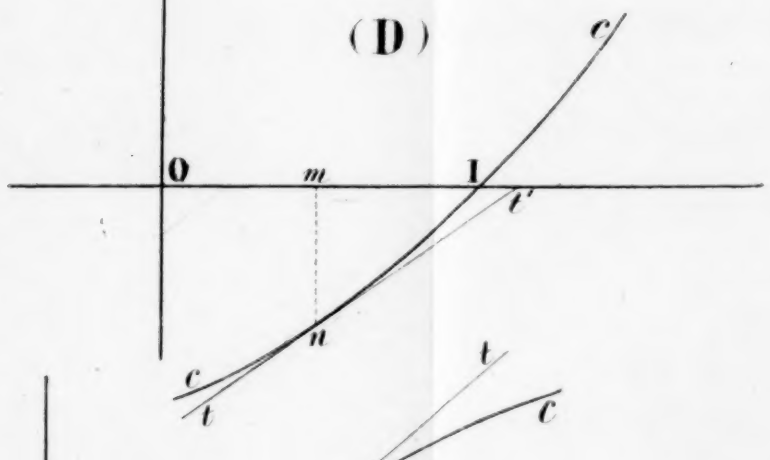

1
X
t'
c

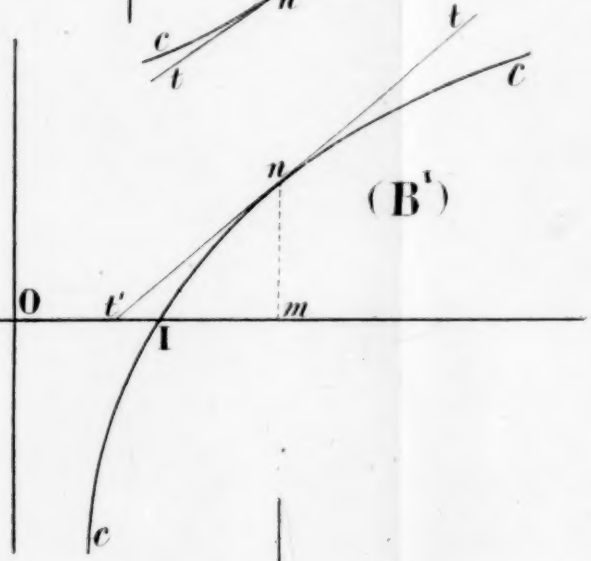
(B)


0
m
t'
1
c
n
t
c

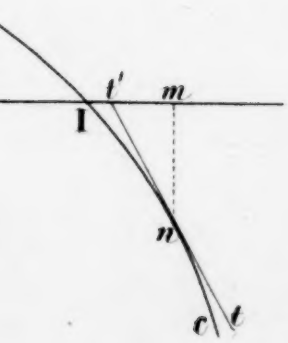
t'
1
c
m
n
c
t

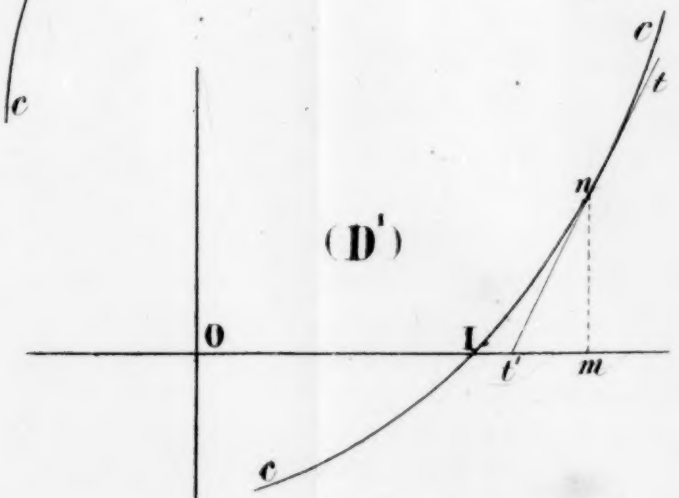
(D)

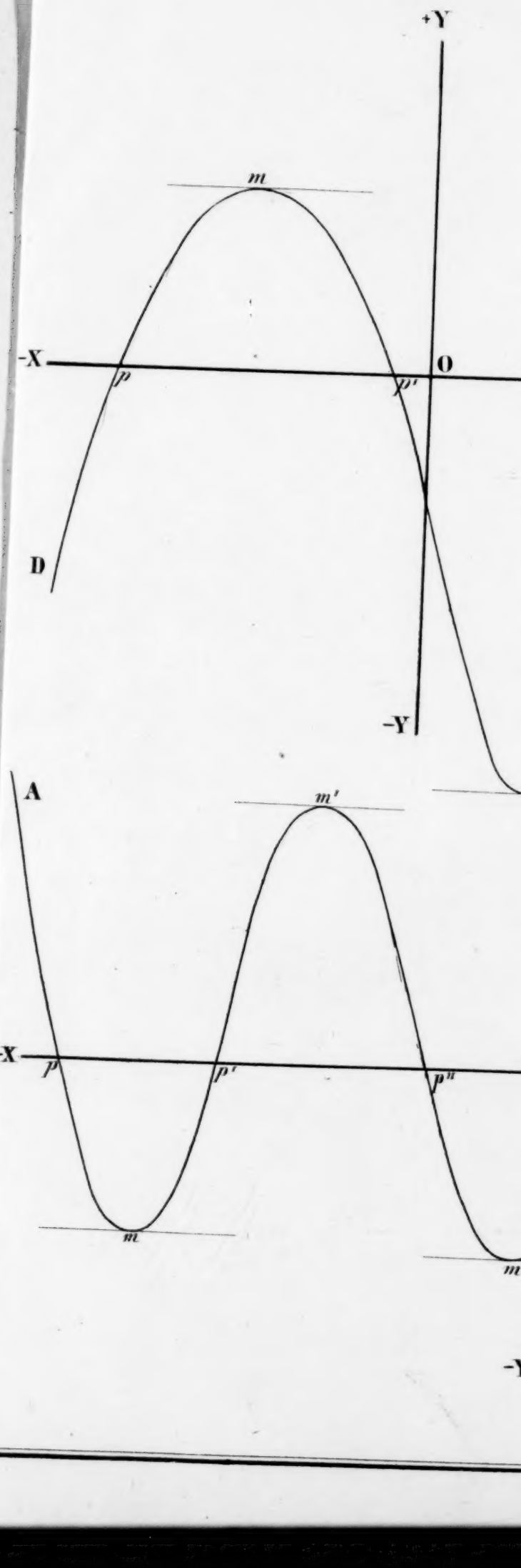

c
0
m
1
t'
n
c
t


t
c
n
(B')
0
t'
m
1
c

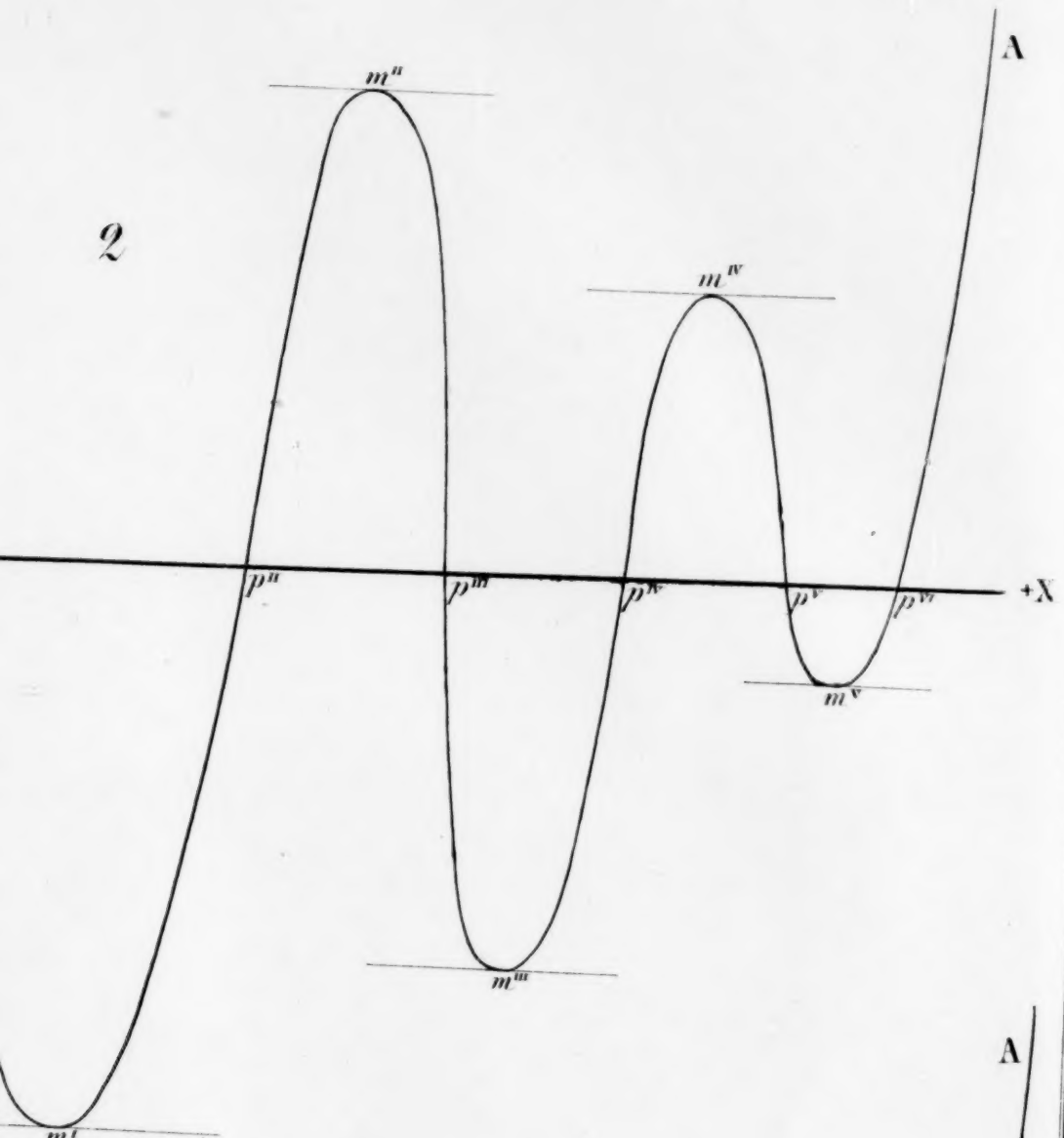
m
n
c
t


t'
m
1
n
c
t

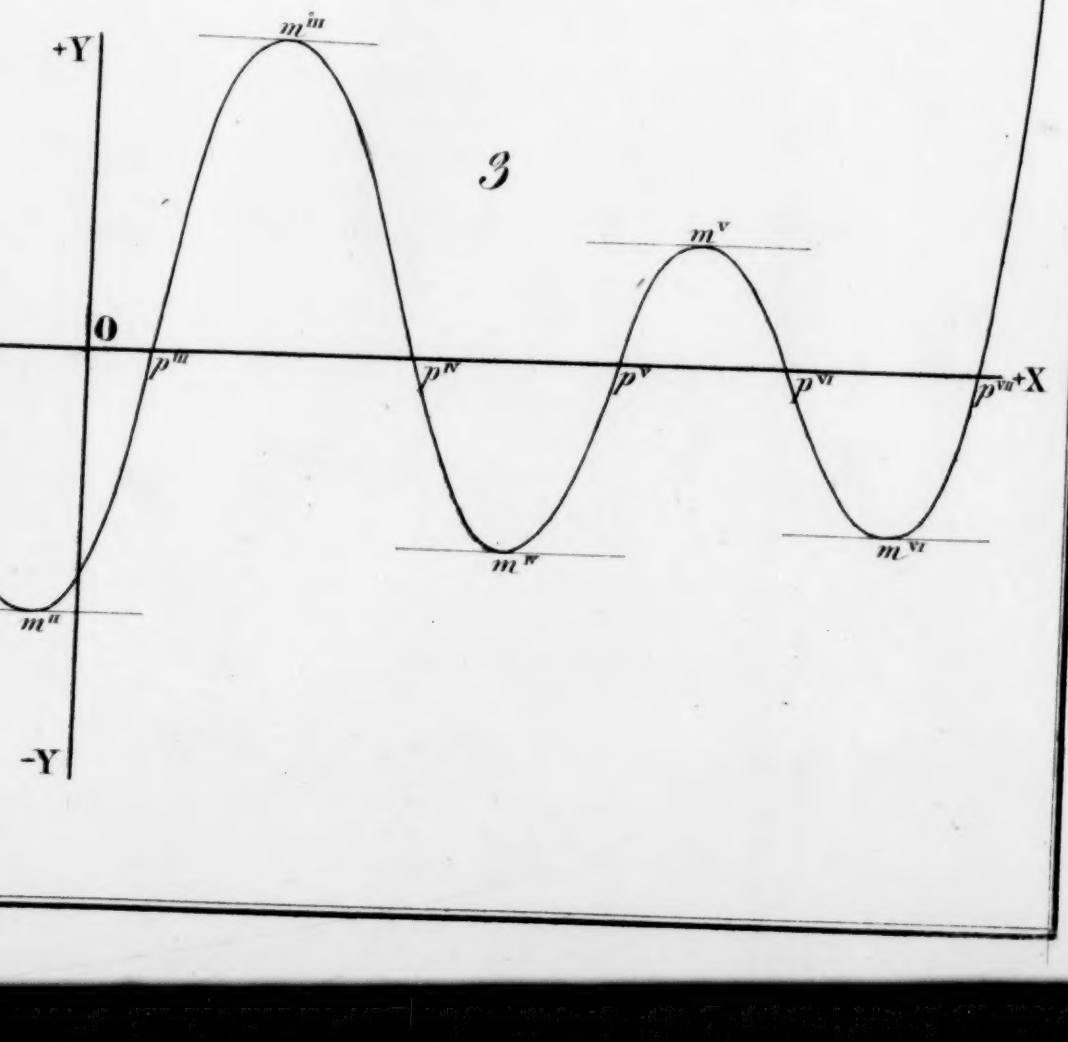

c
t
n
(D')
0
1
t'
m
c


+Y
m
-X
O
p
p'
D
-Y
A
m'
-X
p
p'
p''
m
m
-Y

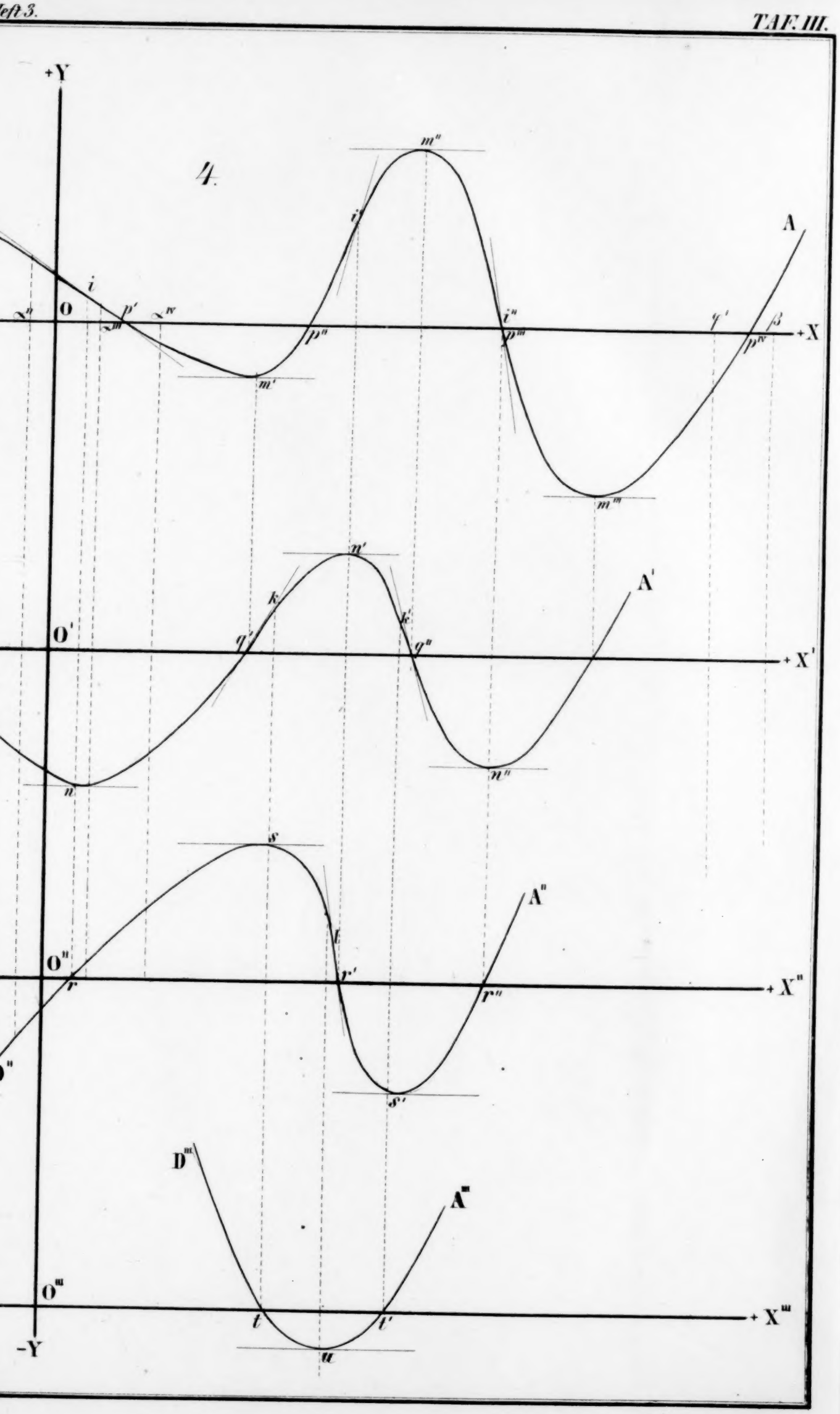
2

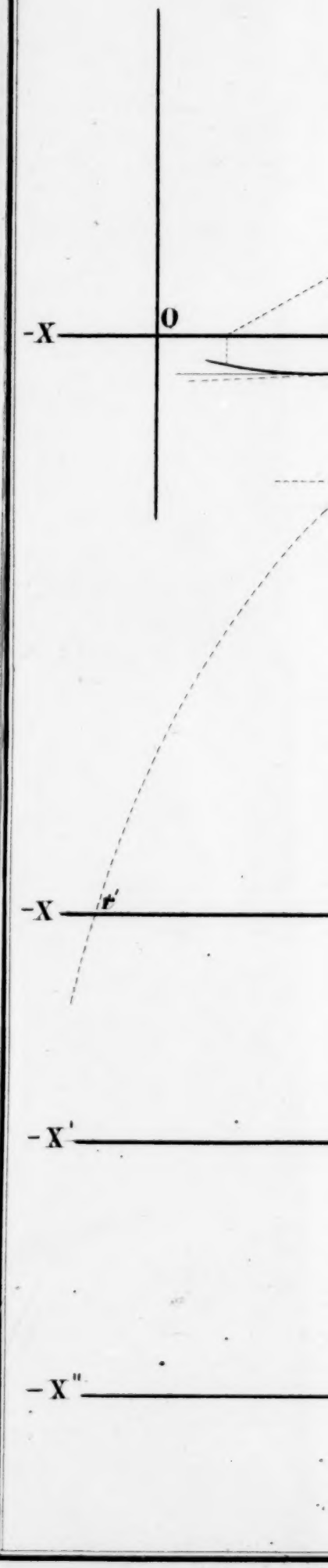

A
m^{II}
m^{IV}
m^{III}
m^{V}
m^{I}
p^{II}
p^{III}
p^{IV}
p^{V}
p^{VI}
+X

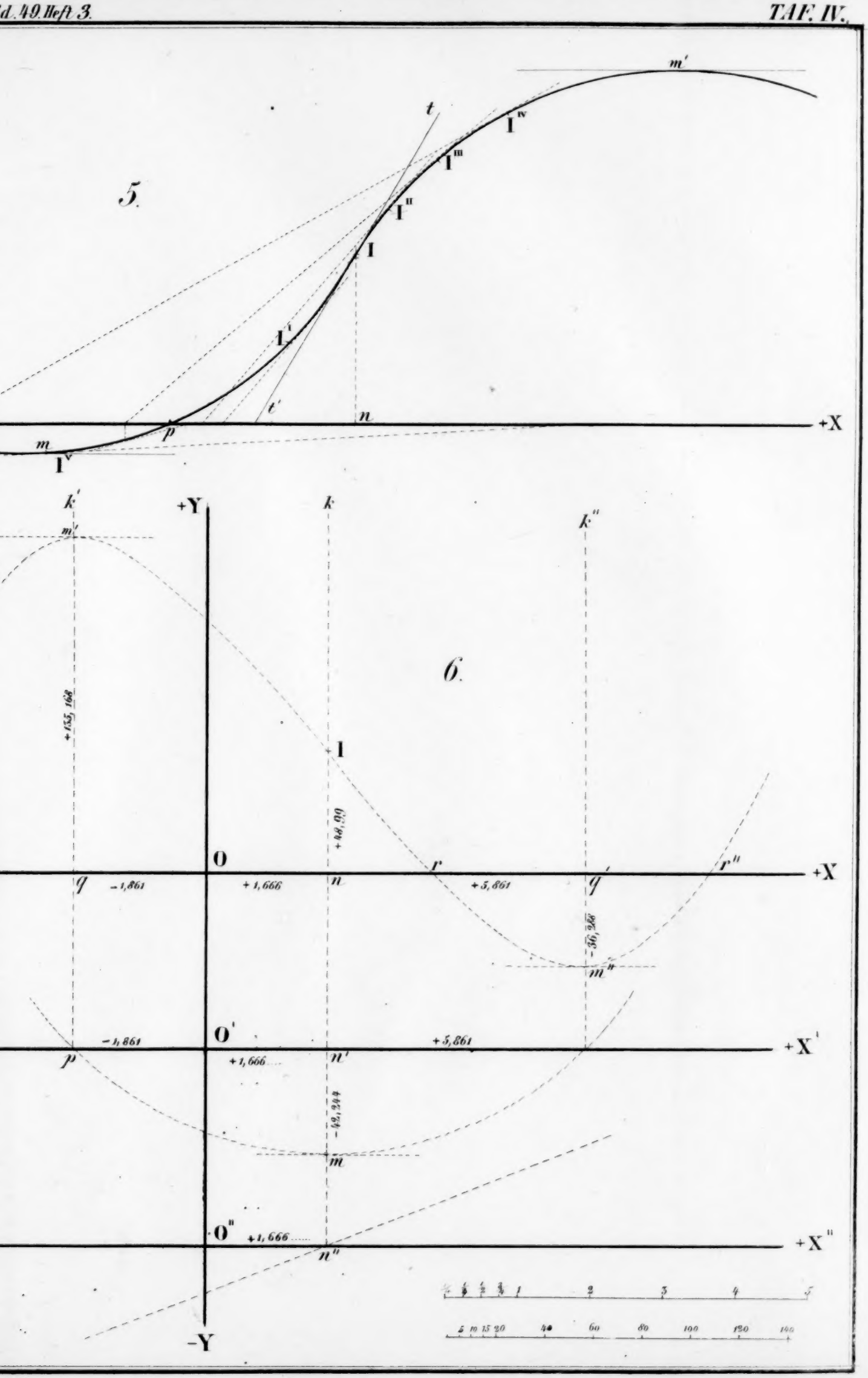
3

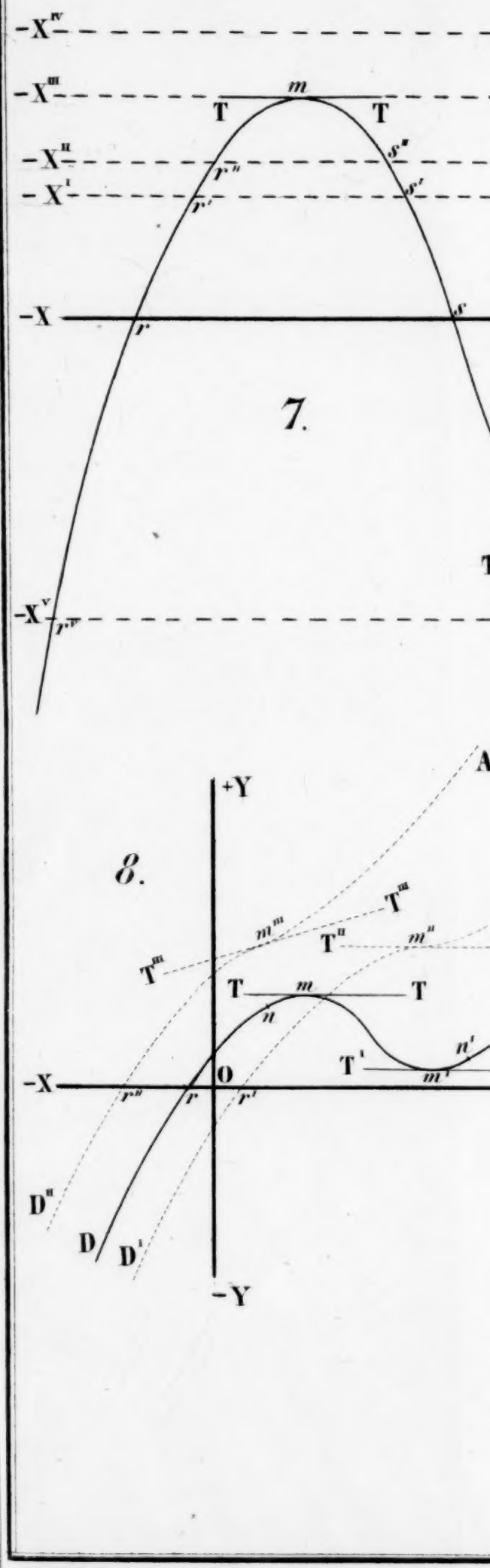

A
+Y
0
-Y
m^{III}
m^{V}
m^{IV}
m^{VI}
m^{II}
p^{III}
p^{IV}
p^{V}
p^{VI}
p^{VII}
+X

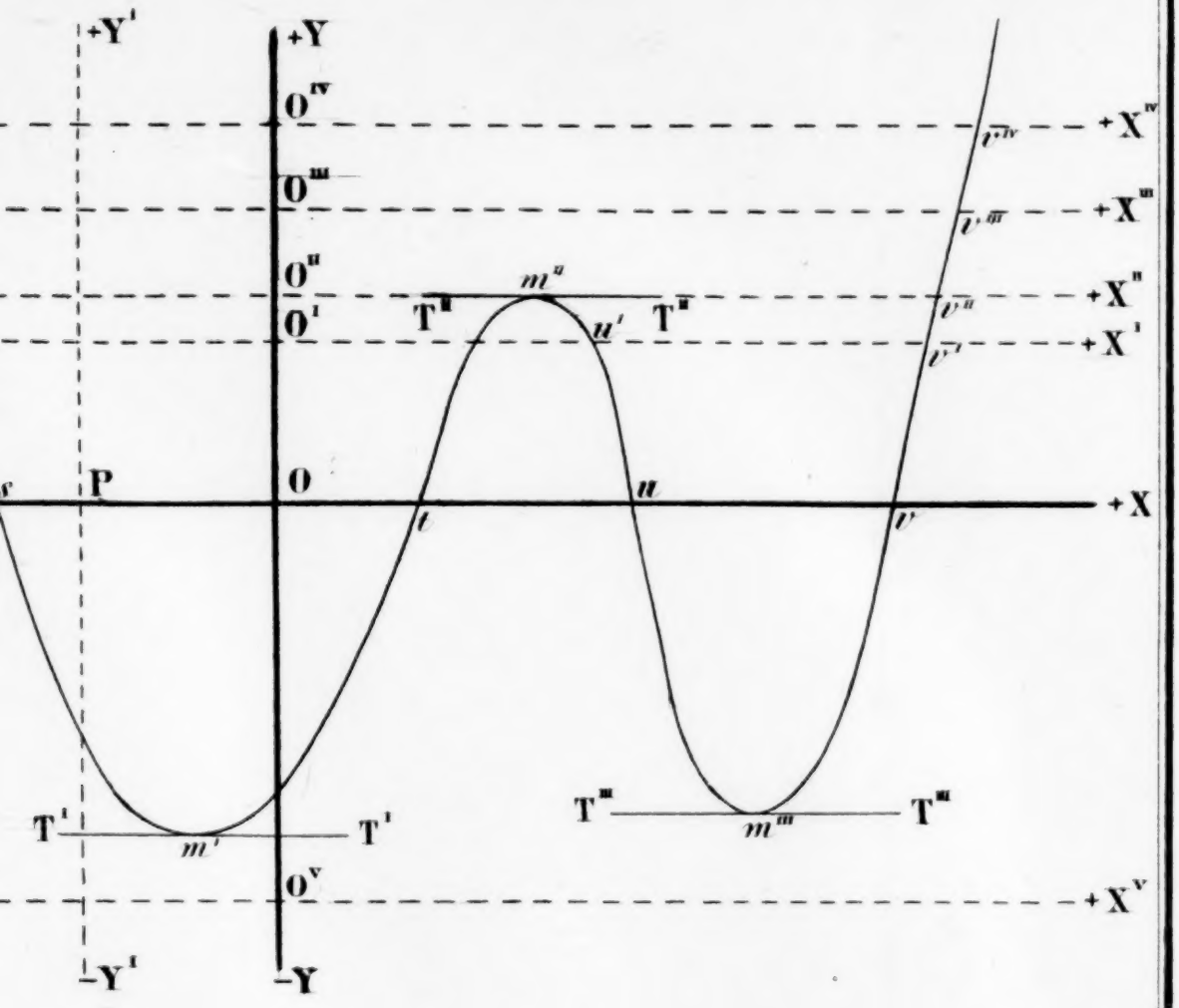
m
X
p
x'
D
D'
X'
D"
X"
X"'

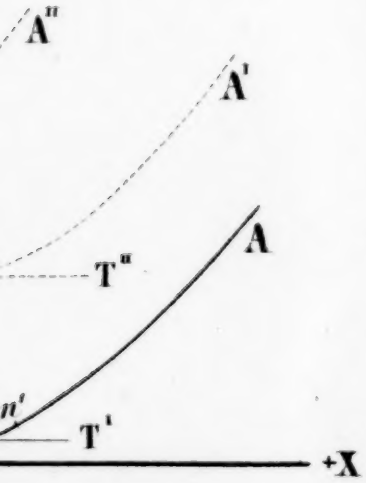

+Y
4.
m''
i'
A
i
O
p'
p''
i''
p'''
q'
β
+X
m'
m'''
n'
k
k'
A'
O'
q'
q''
+X'
n
n''
s
A''
l
O''
r
r'
r''
+X''
s'
D'''
A'''
O'''
t
t'
+X'''
-Y
u


-X
0
-X'
-X''

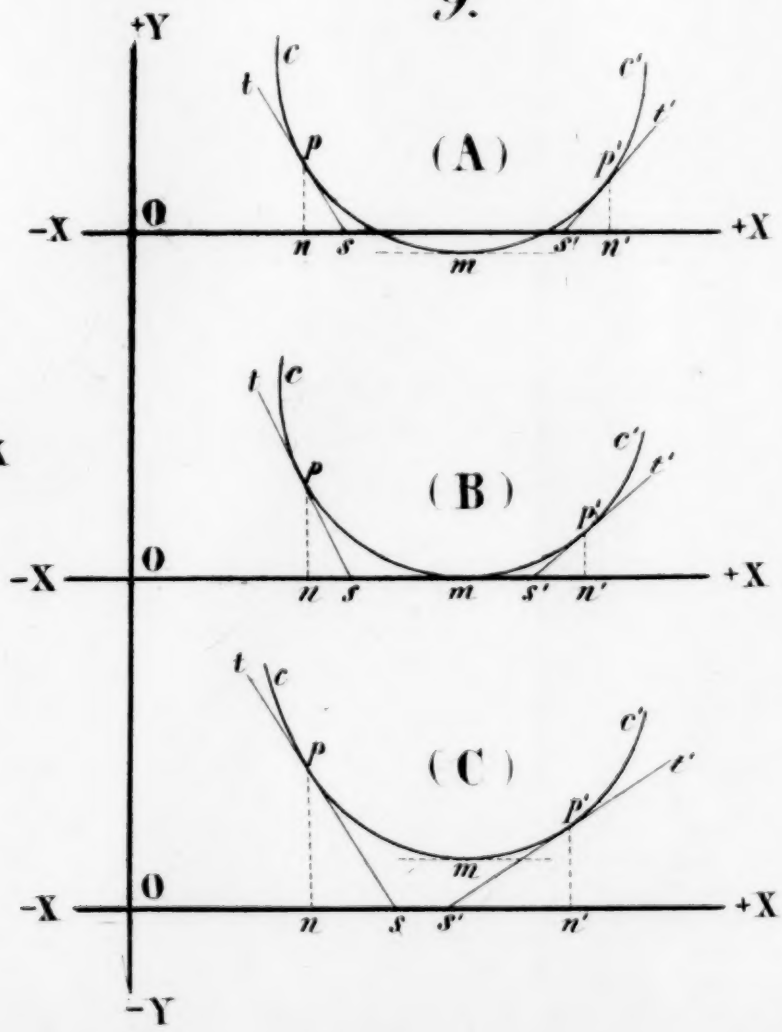

5.
m'
t
I^IV
I^III
I^II
I
I^I
t'
n
+X
p
m
I^V
6.
k'
+Y
k
k''
m'
+155,168
I
+48,99
O
r
r''
+X
q
-1,861
+1,666
n
+5,861
q'
-36,288
m''
O'
-1,861
+5,861
+X'
p
+1,666
n'
-42,244
m
O''
+1,666
+X''
n''
-Y
1 2 3 4 5
5 10 15 20 40 60 80 100 120 140


-X^IV
-X^III
-X^II
-X^I
-X
-X^V
m
T
T
s''
r''
s'
r'
r
s
7.
T
r^V
+Y
A
8.
T^III
m^III
T^II
m^II
T^III
T
m
T
n
n'
T^I
m^I
-X
O
r''
r
r'
D^II
D
D^I
-Y

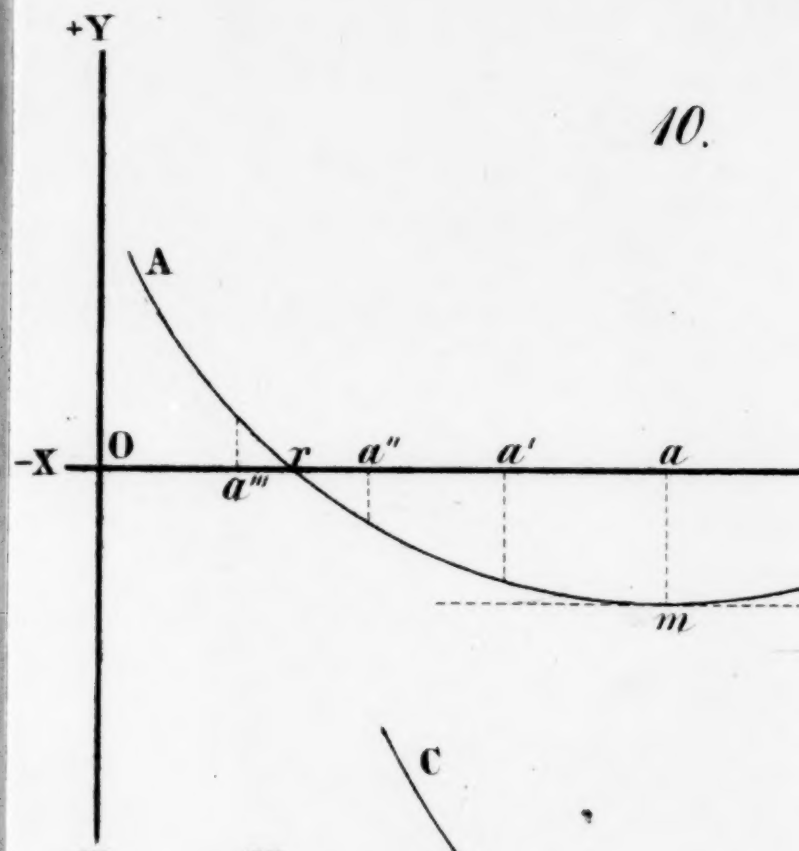

+Y'
+Y
O^IV
O^III
O^II
O^I
O
P
s
t
u
v
m^II
m'
m^III
T^II
T^I
T^III
u'
v'
v''
v'''
v^IV
+X^IV
+X^III
+X^II
+X^I
+X
+X^V
O^V
-Y'
-Y

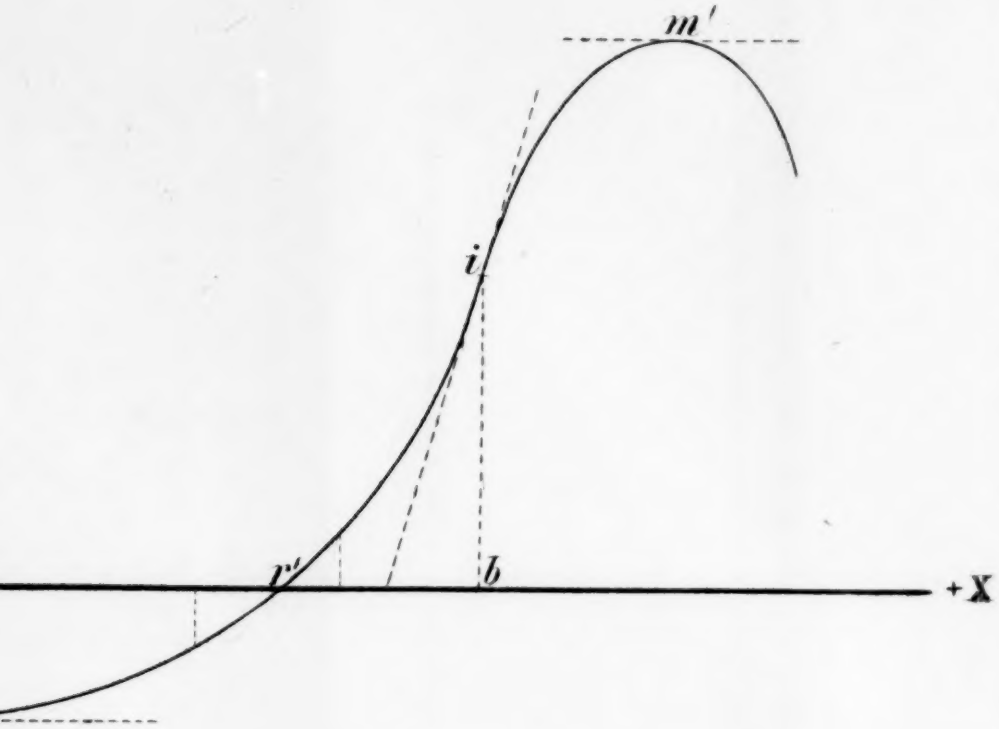

A''
A'
A
T''
T'
n'
+X

9.


+Y
-Y
-X
+X
O
(A)
(B)
(C)
t
c
c'
t'
p
p'
n
s
m
s'
n'

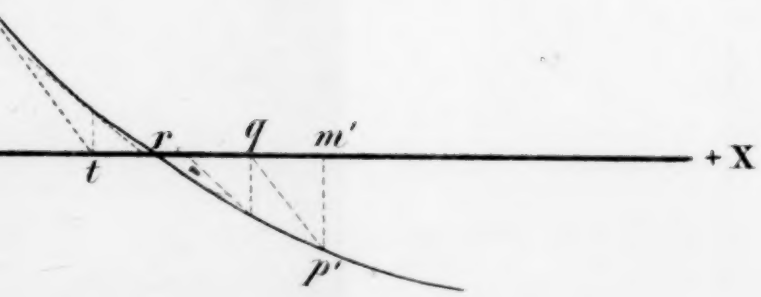
10.

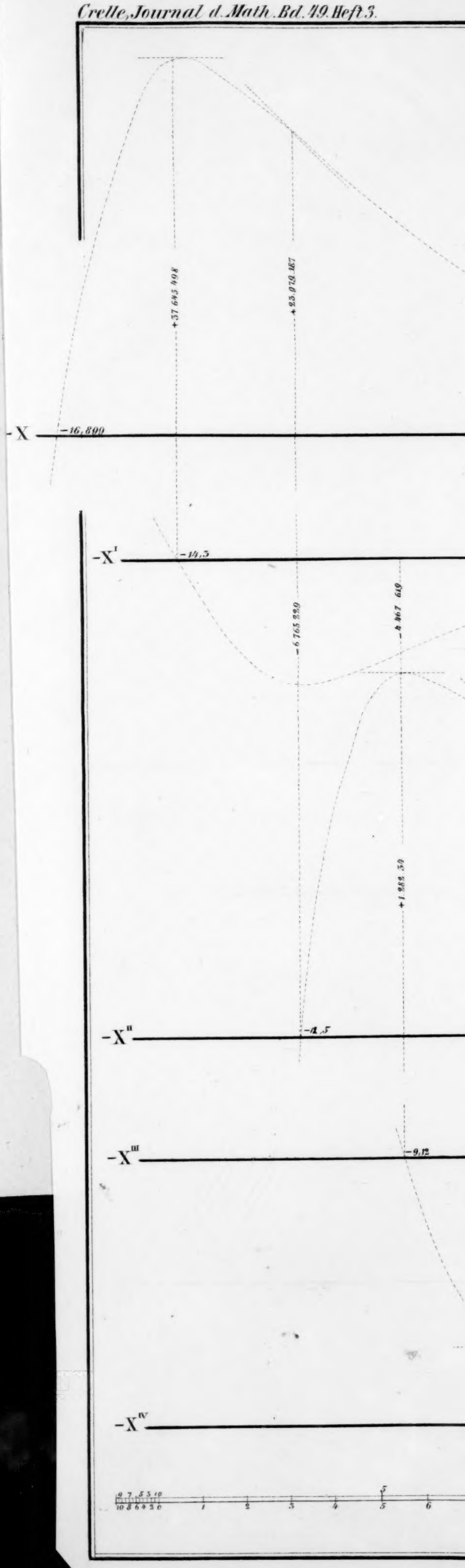




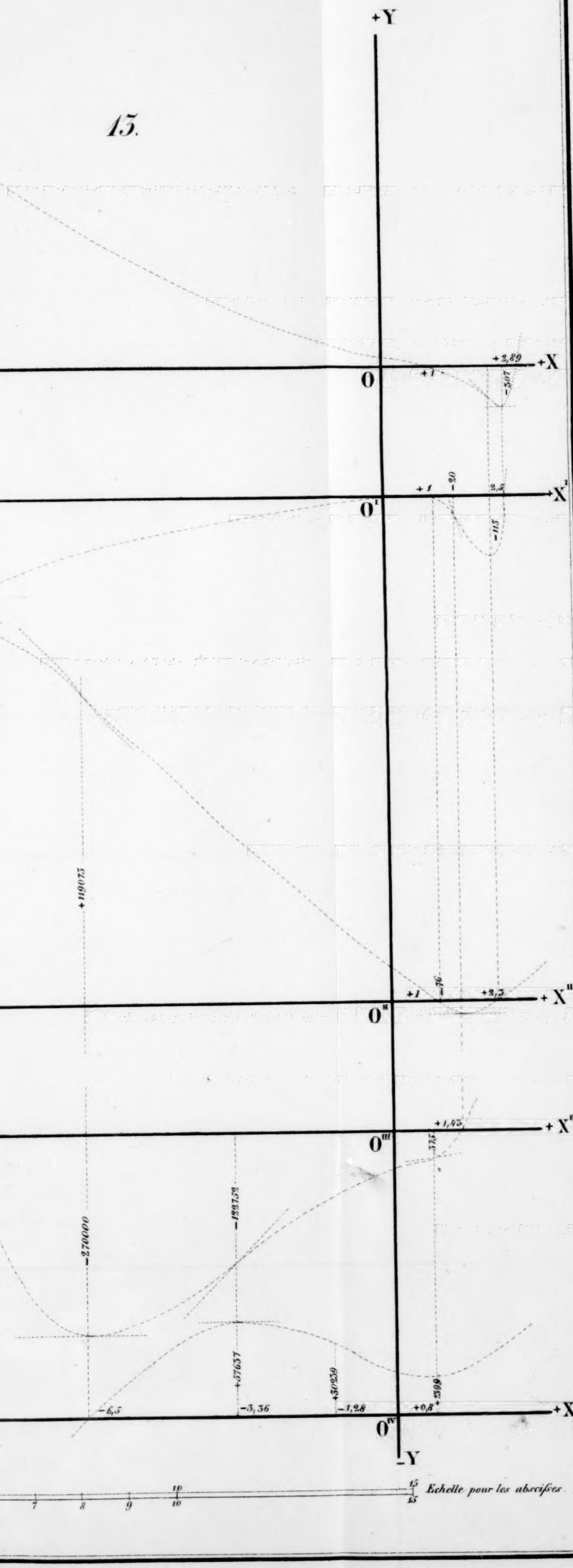
11.

12.



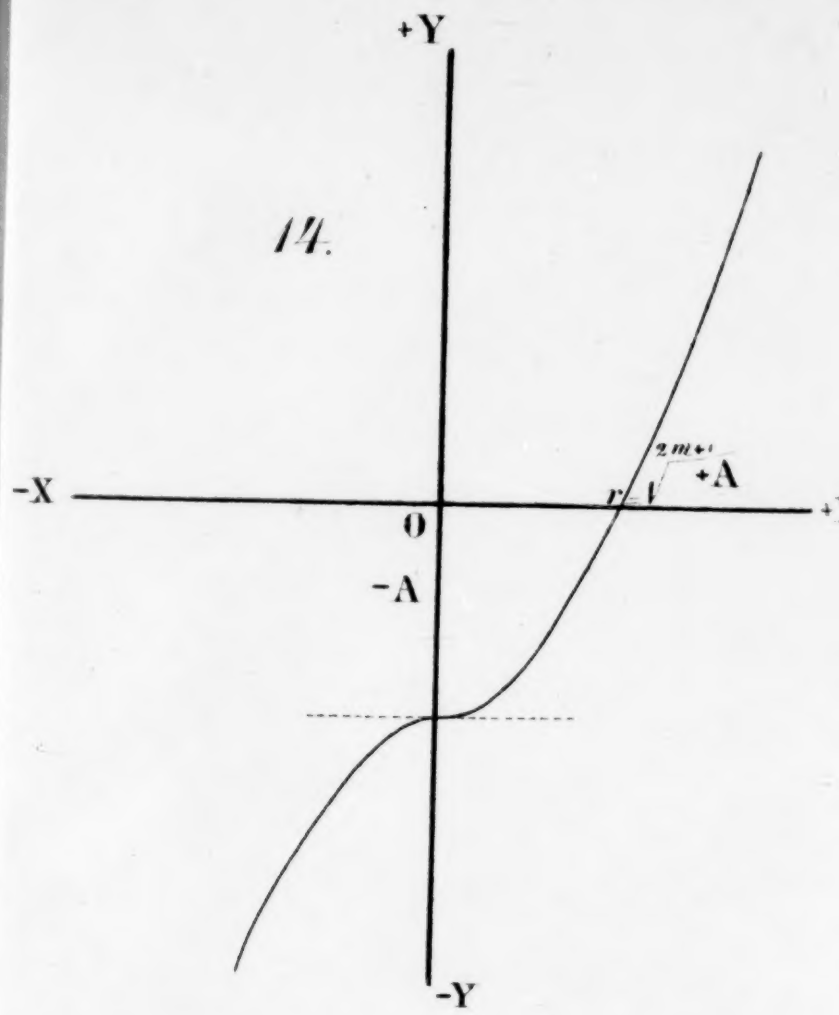

+37 645 498
+23 079 187
-X
-16,800
-X'
-14,3
-6 763 229
-4 467 619
+1 282 34
-X''
-11,5
-X'''
-9,12
-X^IV
1
2
3
4
5
6

15.

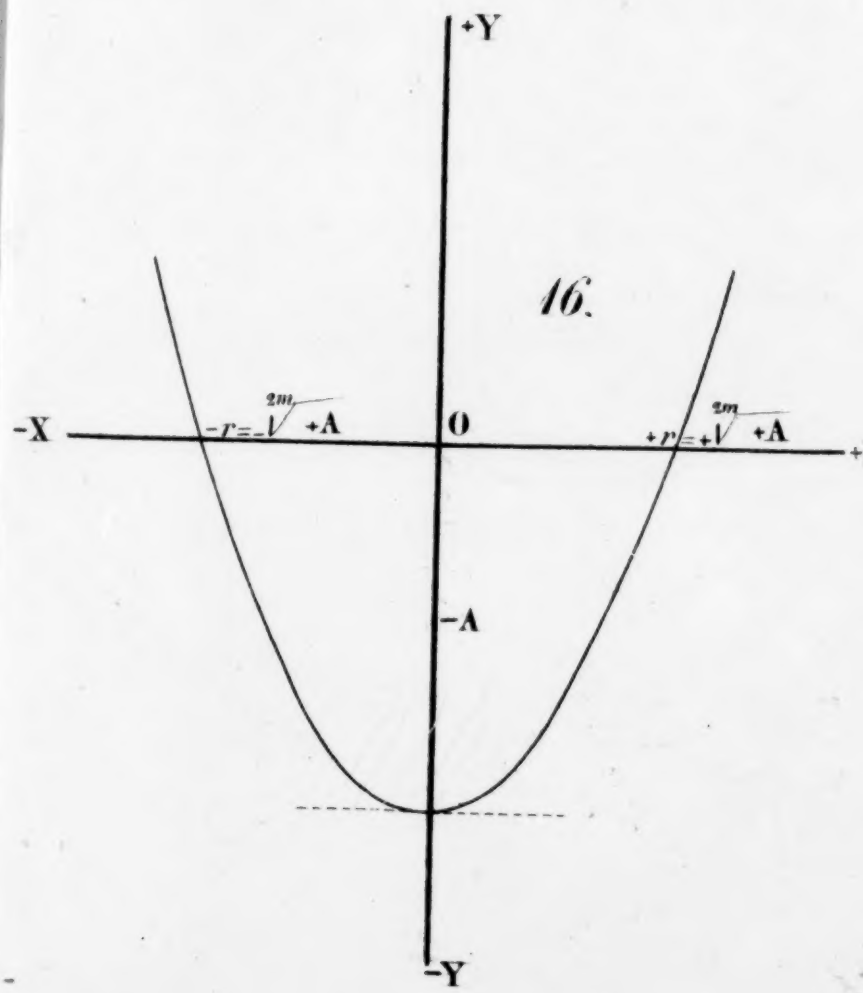


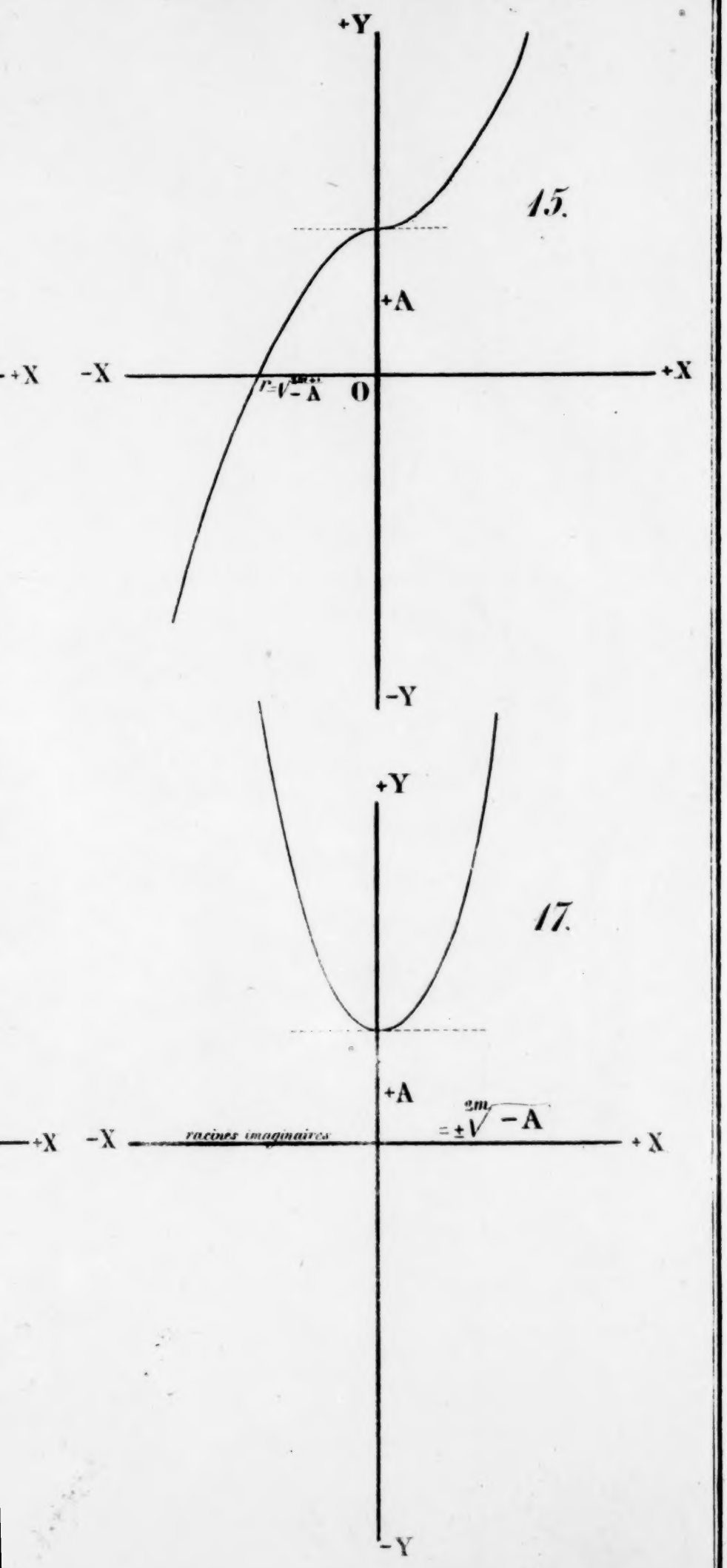
Echelle pour les abscisses.

14.



16.




+Y
15.
+A
-X
+X
O
-Y
+Y
17.
+A
racines imaginaires
+X
-X
+X
-Y